Exercices sur les fonctions circulaires et les fonctions circulaires réciproques

Fonctions circulaires

Exercice 1 *A partir de la formule de Moivre, retrouver les formules d'addition des fonctions circulaires suivantes :*

$$\begin{aligned}
\cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\
\cos(a-b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \\
\sin(a+b) &= \sin a \cos b + \cos a \sin b \\
\sin(a-b) &= \sin a \cos b - \cos a \sin b.
\end{aligned}$$

En déduire les formules d'addition pour la fonction tan, *à savoir :*

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \ \textit{et} \ \tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}.$$

Exercice 2 *A l'aide des formules de duplication, vérifier que, pour* $t = \tan \frac{x}{2}$, *on a :*

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \textit{et} \quad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}.$$

Exercice 3 *Exprimer* $\cos(4x)$ *et* $\sin(4x)$ *en fonction de* $\cos x$ *et* $\sin x$.

Exercice 4 *Résoudre l'équation :* $\cos 4x = \sin 7x$.

Exercice 5 *Résoudre l'équation :* $\cos^2 x = 1/4$.

Exercice 6 $^{(*)}$ *Résoudre les équations suivantes :*

a) $\sin 2x = \cos^2 x$, b) $\cos 2x + 2 \sin x \cos x = 0$ *et* c) $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 5x$.

Exercice 7 *Exprimer en fonction de* $\tan x$ *seulement :*

a) $\dfrac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin^4 x - \cos^4 x}$, b) $\dfrac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sin x + \cos x}$, c)$^{(*)}$ $\cos^2 x - \sin x \cos x$.

Exercice 8 *Soient a, b deux réels. Montrer qu'il existe deux constantes A et α telles que :*

$$a\cos x + b\sin x = A\cos(x-\alpha) \quad \textit{quelque soit } x \in \mathbb{R}.$$

En déduire la résolution de l'équation :

$$\sqrt{3}\cos x + \sin x = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right).$$

Fonctions circulaires réciproques

Exercice 9 *Préciser le domaine de définition et calculer les dérivées des fonctions suivantes :*

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \quad f(x) = \arctan\dfrac{1}{x}, & \text{b)} \quad g(x) = \dfrac{\arcsin x}{x}, \\ \text{c)} \quad h(x) = \arccos\sqrt{x} \quad \textit{et} & \text{d)} \quad k(x) = \sqrt{1-x^2}\arcsin x. \end{array}$$

Exercice 10 *Sachant que $\arcsin(\sin x) = x$ pour $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, et en utilisant la formule de la dérivée de la composée de deux fonctions, démontrer que pour $x \in]-1, 1[$:*

$$(\arcsin)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

De façon analogue, démontrer que pour $x \in]-1, 1[$:

$$(\arccos)'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

et que pour $x \in \mathbb{R}$:

$$(\arctan)'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Exercice 11 *Calculer*

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \quad \arcsin(1/2), & \text{b)} \quad \arctan(-1/\sqrt{3}), & \text{c)} \quad \arcsin(\sin(2\pi/3)), \\ \text{d)} \quad \arctan(\tan(9\pi/4)), & \text{e)} \quad \arcsin(\sin(-9\pi/4)) \quad \textit{et} & \text{f)} \quad \tan(\arctan 3). \end{array}$$

Exercice 12 *Les équations suivantes ont elles des solutions ? Si elles existent, les déterminer.*

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \quad \arcsin x = \dfrac{2\pi}{3}, & \text{b)} \quad \arctan x = \dfrac{2\pi}{3}, & \text{c)} \quad \arcsin x + \arctan\dfrac{1}{3} = \dfrac{\pi}{4}, \\ \text{d)} \quad \arctan x + \arctan(2x) = \dfrac{\pi}{4} \quad \textit{et} & \text{e)} \quad \arccos x + \arctan\dfrac{1}{2} = \pi. & \end{array}$$

Exercice 13 *Trouver une expression simple pour* $\arccos(\cos x)$ *quand* $x \in [\pi; 2\pi]$. *Même question avec* $\arcsin(\sin x)$ *et* $x \in [-3\pi/2; -\pi/2]$.

Exercice 14 *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *l'application définie pour* $x \in \mathbb{R}$ *par*

$$f(x) = \arcsin(\sin x).$$

Etudier les propriétés de f *et tracer son graphe.*

Exercice 15 *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *l'application définie pour* $x \in \mathbb{R}$ *par*

$$f(x) = \arcsin(\sin 3x).$$

Etudier les propriétés de f *et tracer son graphe.*

Exercice 16 (*) *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *l'application définie pour* $x \in \mathbb{R}$ *par :*

$$f(x) = \arccos(\cos x) + \frac{1}{2}\arccos(\cos(2x)) + \frac{1}{6}\arccos(\cos(3x)).$$

Etudier les propriétés de f *et tracer son graphe.*

Exercice 17 (*) *Soit* $f : \mathbb{R}\backslash\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\} \to \mathbb{R}$ *l'application définie par :*

$$f(x) = \arctan(x-1) + \arctan(x+1) - \arctan\frac{2x}{2-x^2}.$$

Etudier les propriétés de f *et tracer son graphe.*

Exercice 18 *Trouver le domaine de définition, puis étudier les variations des fonctions suivantes :*

$$\text{a)}\quad f(x) = \arcsin\frac{2x}{1+x^2}, \qquad \text{b)}\quad g(x) = \arctan\frac{2x}{1-x^2},$$
$$\text{c)}\quad h(x) = \arcsin\frac{2x}{1+x^2} - 2\arctan x \quad \textit{et} \quad \text{d)}\quad k(x) = \arccos\frac{x}{2-x}.$$

Exercice 19 *Démontrer que :*

$$\text{a)}\quad \textit{pour tout } x \in [-1, 1], \quad \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2},$$
$$\text{b)}\quad \textit{si } x > 0, \quad \arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2},$$
$$\text{c)}\quad \textit{si } x < 0, \quad \arctan x + \arctan\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}.$$