PROBLEM:

$A \subseteq \mathbb{R}$, $\langle E_k \rangle_{k=1}^{n}$, $E_k \cap E_\ell = \varnothing \quad (k \neq \ell)$ olsun. Bu halde $m^*\left[A \cap \bigcup_{k=1}^{n} E_k\right] = \sum_{k=1}^{n} m^*(A \cap E_k)$ eşitliğinin gerçeklendiğini gösteriniz.

ÇÖZÜM:

Bu soruyu tümevarım yardımıyla çözebiliriz. $n=1$ için verilen eşitliğin sağlandığı aşikârdır. Bu durumda eşitliğin $n-1$ adet E_k cümlesi için doğru olduğunu kabul edelim. E_k'lar ayrık cümlelerden oluştuğundan

$$A \cap \left[\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right] \cap E_n = A \cap E_n$$

olacaktır ve buradan da

$$A \cap \left[\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right] \cap \mathring{E}_n = A \cap \left[\bigcup_{k=1}^{n-1} E_k\right]$$

elde edilecektir. E_n'in ölçülebilirliği ve $n-1$ adet E_k cümlesi için yaptığımız varsayımdan yola çıkarak gösterilmesi istenen eşitliği buluruz

$$\begin{aligned} m^*\left(A \cap \left[\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right]\right) &= m^*(A \cap E_n) + m^*\left(A \cap \left[\bigcup_{k=1}^{n-1} E_k\right]\right) \\ &= m^*(A \cap E_n) + \sum_{k=1}^{n-1} m^*(A \cap E_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} m^*(A \cap E_k) \end{aligned}$$