PROBLEM:

$\forall a \in \mathbb{R}$, (a,∞) biçimindeki açık aralıkların ölçülebilir olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM:

$A \subset \mathbb{R}$ herhangi bir cümle olsun. $A_1 = A \cap (a,\infty)$, $A_2 = A \cap (-\infty, a]$ alalım. Bu durumda (a,∞) açık aralığının ölçülebilir olduğunu ispatlamak için $m^*(A_1) + m^*(A_2) \le m^*(A)$ eşitsizliğini göstermemiz gerekmektedir. $m^*(A) = \infty$ ise eşitlik durumu gerçekleneceğinden ispat aşikârdır. $m^*(A) < \infty$ ise $\varepsilon > 0$ olacak biçimde

$$\sum \ell(I_n) \le m^*(A) + \varepsilon$$

eşitsizliğini sağlayan, ve A cümlesinin bir örtülüşü olan, (I_n) açık aralıklarının sayılabilir bir topluluğu mevcut olacaktır.

$I_n' = I_n \cap (a,\infty)$ ve $I_n'' = I_n \cap (-\infty, a]$ olsun. Bu durumda I_n' ve I_n'' birer aralık olacak (ya da boş cümle) ve

$$\ell(I_n) = \ell(I_n') + \ell(I_n'') = m^*(I_n') + m^*(I_n'')$$

eşitliği sağlanacaktır. $A_1 \subset \bigcup I_n'$ olduğundan

$$m^*(A_1) \le m^*\left(\bigcup I_n'\right) \le \sum m^*(I_n')$$

ve benzer şekilde $A_2 \subset \bigcup I_n''$ olduğundan

$$m^*(A_2) \le m^*\left(\bigcup I_n''\right) \le \sum m^*(I_n'')$$

eşitsizliklerini yazabiliriz. Böylelikle

$$\begin{aligned} m^*(A_1) + m^*(A_2) &\le \sum \left(m^*(I_n') + m^*(I_n'')\right) \\ &\le \sum \ell(I_n) \le m^*(A) + \varepsilon \end{aligned}$$

eşitsizliğine ulaşmış oluruz. Burada ε sayısı keyfi bir pozitif sayı olduğundan istenen

$$m^*(A_1) + m^*(A_2) \le m^*(A)$$

eşitsizliği sağlanmış olur.