

Exercices sur les fonctions exponentielles, logarithmes et hyperboliques

Fonctions exponentielles et logarithmes

Exercice 1 Rechercher dans \mathbb{R} les solutions de l'équation

$$\ln\left(\frac{x+3}{2}\right) = \frac{1}{2}(\ln x + \ln 3).$$

Exercice 2 Résoudre dans \mathbb{R}^2 le système :

$$\begin{cases} x + y = 55 \\ \ln x + \ln y = \ln 700 \end{cases}$$

Exercice 3 Déterminer la limite, pour $x \rightarrow +\infty$, de :

$$\text{a) } \ln x - x, \quad \text{b) } \ln^2 x - \sqrt{x}, \quad \text{c) } \frac{\ln(x+1)}{\ln x}.$$

Exercice 4 Déterminer la limite, pour $x \rightarrow 0$ avec $x > 0$, de la fonction

$$f(x) = \sqrt{x} \ln^3 x.$$

Exercice 5 Calculer

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x), \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\ln x}, \quad \text{et c) } \lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{1/x}.$$

Exercice 6 Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= x \ln x, & \text{b) } f(x) &= \ln |\ln x|, \\ \text{c) } f(x) &= \ln |\tan(x/2)| & \text{et d) } f(x) &= \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right). \end{aligned}$$

Exercice 7 Soient x et y deux réels distincts. Montrer que l'on a :

$$e^{\frac{x+y}{2}} < \frac{e^x + e^y}{2}.$$

(*) Interpréter cette inégalité sur le graphe de la fonction $x \rightarrow e^x$.

Exercice 8 Etudier les variations et tracer le graphe de la fonction $f(x) = x - \ln x$.

Exercice 9 Etudier les fonctions :

$$f(x) = \ln x - \frac{x-1}{x} \quad \text{et} \quad g(x) = x - 1 - \ln x.$$

En déduire que, si $x > 1$, on a :

$$\frac{x-1}{x} < \ln x < x - 1.$$

Exercice 10 Etudier les fonctions :

$$f(x) = \ln(1+x) - x, \quad g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \quad \text{et} \quad h(x) = x - 1 - \ln x.$$

En déduire que, si $x > 0$, on a :

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x.$$

Exercice 11 Etudier le sens de variation de la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^x - 1 - x$. En déduire que l'on a :

$$1 + x < e^x \quad \text{pour tout } x \text{ réel.}$$

Exercice 12 Montrer que pour tout entier positif n et pour tout réel x :

$$(\operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x))^n = \operatorname{ch}(nx) + \operatorname{sh}(nx).$$

Fonctions hyperboliques

Exercice 13 Vérifier les formules d'addition des fonctions hyperboliques suivantes

$$\begin{aligned} \text{a) } \operatorname{sh}(a+b) &= \operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{sh}(b)\operatorname{ch}(a), & \text{b) } \operatorname{sh}(a-b) &= \operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(b) - \operatorname{sh}(b)\operatorname{ch}(a), \\ \text{c) } \operatorname{ch}(a+b) &= \operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{sh}(b)\operatorname{sh}(a), & \text{d) } \operatorname{ch}(a-b) &= \operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) - \operatorname{sh}(b)\operatorname{sh}(a), \\ \text{e) } \operatorname{th}(a+b) &= \frac{\operatorname{th}(a) + \operatorname{th}(b)}{1 + \operatorname{th}(a)\operatorname{th}(b)} & \text{et f) } \operatorname{th}(a-b) &= \frac{\operatorname{th}(a) - \operatorname{th}(b)}{1 - \operatorname{th}(a)\operatorname{th}(b)}. \end{aligned}$$

Exercice 14 Montrer que l'on a, pour x et y réels :

$$\text{a) } \operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y = 2 \operatorname{sh} \frac{x+y}{2} \operatorname{ch} \frac{x-y}{2}, \quad \text{b) } \operatorname{ch} x - \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{sh} \frac{x+y}{2} \operatorname{sh} \frac{x-y}{2}.$$

Exercice 15 Calculer $\operatorname{ch}(\frac{1}{2} \ln(3))$ et $\operatorname{sh}(\frac{1}{2} \ln(3))$.

A l'aide de la formule d'addition $\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{sh}(b)\operatorname{sh}(a)$ et de la question précédente, déterminer les solutions réelles de l'équation :

$$2 \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} y = \sqrt{3} \operatorname{ch}(5x).$$

Exercice 16 Résoudre les équations :

$$\text{a) } 2 \operatorname{ch} x + 3 \operatorname{sh} x = 1, \quad \text{b) } \operatorname{ch} x + 2 \operatorname{sh} x = 1, \quad \text{et c) } 3 \operatorname{ch} x + 2 \operatorname{sh} x = 4.$$

Exercice 17 Résoudre le système :

$$\begin{cases} \operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = 3 \\ \operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y = 2 \end{cases}$$

Exercice 18 Calculer :

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(\operatorname{ch} x) - x, \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1-\operatorname{th} x} \quad \text{et c) } \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{th} x)^{1/\operatorname{sh} x}.$$

Exercice 19 Trouver les limites, quand $x \rightarrow 0$, des fonctions suivantes :

$$\text{a) } f(x) = \frac{\operatorname{sh} x}{x}, \quad \text{b) } g(x) = \frac{1 - \operatorname{ch} x}{x^2} \quad \text{et c) } h(x) = \frac{\operatorname{th} x}{x}.$$

Exercice 20 Etudier les variations et tracer le graphe des fonctions suivantes :

$$\text{a) } f(x) = \operatorname{th} \frac{1}{x}, \quad \text{b) } h(x) = \operatorname{th} x - \frac{1}{\operatorname{ch} x}.$$

Exercice 21 (*) Calculer les dérivées successives de la fonction

$$x \mapsto f(x) = e^{x \operatorname{ch}(a)} \operatorname{sh}(x \operatorname{sh}(a)) \quad \text{où } a \text{ est un réel fixé.}$$