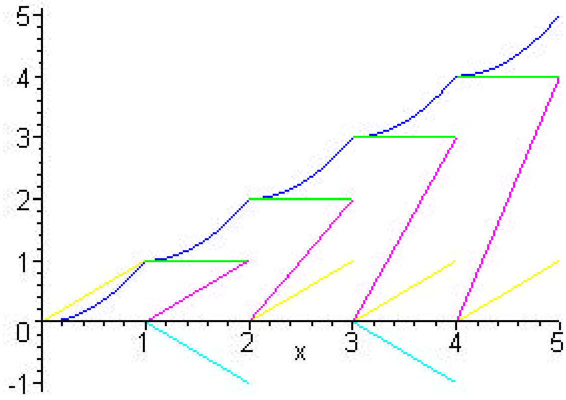
Correction fiche limites continuité

Ex 1 :



Ex 2 : $\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}=\dfrac{\sqrt{x}-2}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)(x-1)}=\dfrac{1}{\left(\sqrt{x}+2\right)(x-1)}$ donc

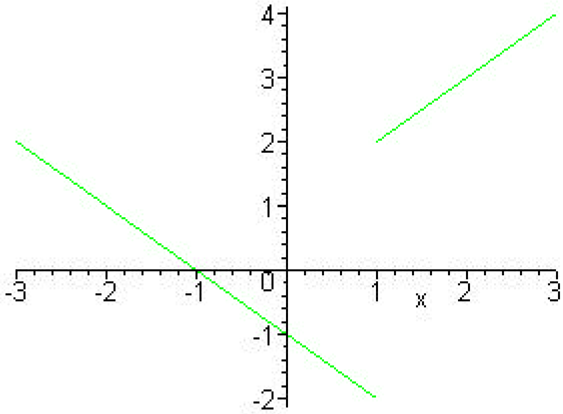
$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}=\lim_{x\to 4}\frac{1}{\left(\sqrt{x}+2\right)(x-1)}=\frac{1}{12}$$

$\dfrac{x^3-3x+2}{x^2-4}=\dfrac{(x+2)(x^2-2x+1)}{(x-2)(x+2)}=\dfrac{(x-1)^2}{x-2}$ donc $\displaystyle\lim_{x\to -2}\frac{x^3-3x+2}{x^2-4}=\lim_{x\to -2}\frac{(x-1)^2}{x-2}=-\frac{9}{4}$

$\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\dfrac{\left(\sqrt{1+x}-1\right)\left(\sqrt{1+x}+1\right)}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=\dfrac{x}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=\dfrac{1}{\left(\sqrt{1+x}+1\right)}$ donc

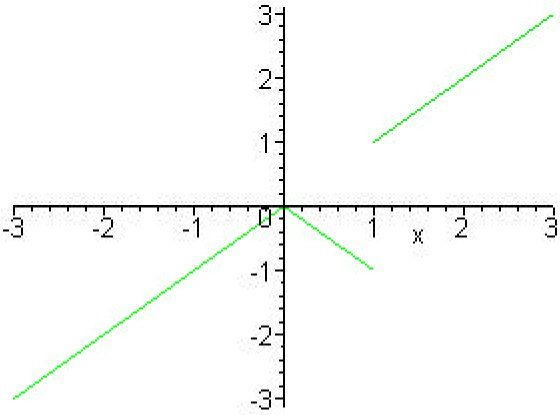
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=\frac{1}{2}$$

Ex 3 :



$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{x^2-1}{|x-1|}=\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{(x-1)(x+1)}{1-x}=\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}-(x+1)=-2$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{x^2-1}{|x-1|}=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}(x+1)=2$$



Ex 4 :

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{x(x-1)}{x-1}=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} x=1$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{x(1-x)}{x-1}=\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} -x=-1$$

Ex 5 : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^2+1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1} x^2+1=2$

Ex 6 : $\lim\limits_{x\to\frac{p}{4}}\dfrac{\sin x-\sin\frac{p}{4}}{\cos x-\cos\frac{p}{4}}=\lim\limits_{x\to\frac{p}{4}}\dfrac{-2\sin\left(\dfrac{x-\frac{p}{4}}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x+\frac{p}{4}}{2}\right)}{2\sin\left(\dfrac{x-\frac{p}{4}}{2}\right)\sin\left(\dfrac{x+\frac{p}{4}}{2}\right)}=\lim\limits_{x\to\frac{p}{4}}\dfrac{-1}{\tan\left(\dfrac{x+\frac{p}{4}}{2}\right)}=-1$

Ex 7 :

a) $E_f=\mathbb{R}^*$ et on a : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=-\infty$ *et* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=-\infty$ donc x=0 est asymptote verticale à Cf.

De plus $f(x)=x-\dfrac{1}{x^2}$ *et* $\lim\limits_{x\to\pm\infty}-\dfrac{1}{x^2}=0$ donc la droite d'équation y = x est asymptote oblique à Cf.

b) $E_f=\left]-\infty;-1\right]\cup\left[1;+\infty\right[$ et on a

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \text{ } et \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}=1$$

$$puis \lim_{x\to+\infty} f(x)-x=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-1}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)}{\sqrt{x^2-1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}=0$$

d'où y = x est asymptote oblique à Cf. (à droite)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \; et \; \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} = -1$$

$$puis \lim_{x\to-\infty} f(x)+x = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-1}+x = \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)}{\sqrt{x^2-1}-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}-x} = 0$$

donc y=-x est asymptote oblique à Cf (à gauche)

c) même méthode conduisant à y = x-1/2 et y=-x+1/2 asymptotes obliques à Cf.

Ex 8 : quotient de fonctions continues en 0 donc pas de problème !

Ex 9 :
$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{x}{x^2-x} = \lim_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{1}{x-1} = -1$$
$$\lim_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to0\\x<0}} \frac{x}{x^2+x} = \lim_{\substack{x\to0\\x<0}} \frac{1}{x+1} = 1$$
donc f ne peut être prolongée par continuité en 0

(il aurait fallu que les deux limites soient égales).

Ex 10 : a) f est continue en 0 comme quotient de fonctions continues en 0.
b)
$$\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1} \frac{x^3-2x^2-x+2}{1-x} = \lim_{x\to1} \frac{(x-1)(x^2-x-2)}{1-x} = \lim_{x\to1} 2+x-x^2 = 2$$
$$\lim_{x\to-1} f(x) = \lim_{x\to-1} \frac{x^3-2x^2-x+2}{1+x} = \lim_{x\to-1} \frac{(x+1)(x^2-3x+2)}{1+x} = \lim_{x\to-1} x^2-3x+2 = 6$$

donc on peut prolonger f par continuité en 1 et en –1 et on a :
$$g : \begin{cases} g(x) = f(x) \; \forall x \in \mathbb{R} - \{-1;1\} \\ g(1) = 2 \\ g(-1) = 6 \end{cases}$$

Ex 11 : f(I) = [-1 ; 3] et f(J) = [-1 ; 0] U [1 ; 2].

Ex 12 : $y = \frac{x+1}{x-1} \forall x \in \left]1;+\infty\right[\Leftrightarrow y(x-1) = x+1 \Leftrightarrow x(y-1) = 1+y \Leftrightarrow x = \frac{y+1}{y-1}$ de plus

$f(\left]1;+\infty\right[) = \left]1;+\infty\right[$ donc $f^{-1} = f$.

Ex 13 :
$$y = \frac{x+1}{1-x} \Leftrightarrow y(1-x) = x+1 \Leftrightarrow x(-y-1) = 1-y \Leftrightarrow x = \frac{y-1}{y+1}$$
$$et \; f(\left]1;+\infty\right[) = \left]-\infty;-1\right[$$

Donc
$$f^{-1} : \left]-\infty;-1\right[\to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto y = \frac{x-1}{x+1}$$

Ex 14 : soit $f(x) = e^{\frac{1}{x}} + x^2(\sqrt{e} - e)$. Cette fonction est continue sur l'intervalle [1 ; 2] en tant que somme et composée de fonctions continues sur [1 ; 2]. De plus $f(1) = \sqrt{e} > 0$ et $f(2) = 5\sqrt{e} - 4e < 0$. Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $g \in [1;2]$ $telleque$ $f(g) = 0$. Grâce à l'analyse numérique, nous pouvons trouver une valeur approchée de $g = 1.386717833 \ldots$