

Chapitre 11

RÉPONSES À CERTAINS EXERCICES

11.1 Problèmes du Chapitre I

SECTION 1.1

Problème 1.1 Si l'on calcule les premières valeurs, $i^0 = 1$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$, $i^6 = -1 \dots$ il semble que les quatre valeurs $1, i, -1, -i$ forment un cycle qui se répète. En effet, si $n \in \mathbb{N}$, $n = 4j + k$ où $j, k \in \mathbb{N}$ et $0 \leq k < 4$. Donc,

$$i^n = i^{4j+k} = (i^4)^j i^k$$

ce qui démontre que seules les quatre valeurs $1, i, -1, -i$ sont possibles.

Problème 1.2

$$\begin{array}{lll} (a) & -4 & (b) \quad -\sqrt{2} - 5i \quad (c) \quad 29 + 2i \\ (d) & \frac{1+i}{2} & (e) \quad \frac{1}{25}(17 - 6i) \quad (f) \quad 1 \end{array}$$

Problème 1.3

$$\begin{array}{ll} (a) & \pm(1 + 2i) \quad (b) \quad \pm(3 + 2i) \\ (c) & \pm(\sqrt{3} + i), \pm(\sqrt{3} - i) \quad (d) \quad 1, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}$$

Problème 1.4

$$(a) \quad -13 + 24i \quad (b) \quad -\frac{1}{4} \quad (c) \quad 38$$

Problème 1.5 Si $w = u + iv$ alors $w^2 = u^2 - v^2 + 2iuv$ et

$$u^2 - v^2 = x, \quad u^2 + v^2 = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad 2uv = y$$

d'où

$$u^2 = \frac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{2} \quad \text{et} \quad v^2 = \frac{-x + \sqrt{x^2 + y^2}}{2}.$$

Donc, il y a deux choix pour u et deux pour v laissant la possibilité de quatre combinaisons. Mais, la condition $2uv = y$ exige que u et v aient le même signe si $y \geq 0$ et les signes opposés, si $y < 0$ et la formule suit immédiatement.

Problème 1.9 Posons $P(z) = az^2 + bz + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Si z_1 est une racine de l'équation $P(z) = 0$ alors,

$$\begin{aligned} 0 = \bar{0} = \overline{P(z_1)} &= \overline{az_1^2 + bz_1 + c} \\ &= \bar{a}\bar{z}_1^2 + \bar{b}\bar{z}_1 + \bar{c} \\ &= a\bar{z}_1^2 + b\bar{z}_1 + c. \end{aligned}$$

Donc, si z_1 est une racine de l'équation il va de même pour \bar{z}_1 . (Bien sûr ceci ne vaut pas grande chose si z_1 est réel!) Or, vu que $a \neq 0$

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Si $b^2 - 4ac \geq 0$ les solutions sont

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Si $b^2 - 4ac < 0$ on observe que $(\pm i\sqrt{4ac - b^2})^2 = b^2 - 4ac$ indiquant que les deux solutions sont

$$z = \frac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}.$$

Problème 1.10 Il est facile à voir que $T = 2\Re(z) = z + \bar{z}$ et $N = |z|^2 = z\bar{z}$.

Problème 1.11 Pour l'inégalité à droite on note que

$$(|x| + |y|)^2 = |x|^2 + |y|^2 + 2|x||y| \geq |x|^2 + |y|^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$$

et pour celle à gauche

$$|x|^2 - |y|^2 - \frac{1}{2}(|x| + |y|)^2 = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - 2|x||y|) = \frac{1}{2}(|x| - |y|)^2 \geq 0.$$

Problème 1.12 Les deux racines sont $z = \pm 2 - i$.

SECTION 1.2

Problème 1.16 Les autres conditions étant évidentes il suffit de déterminer la condition qui garantira que chaque élément différent de zéro soit inversible. Ceci sera le cas si et seulement si pour tout couple $(a, b) \neq (0, 0)$ le système d'équations linéaires

$$ac + (b\alpha)d = 1 \quad bc = (a + b\beta)d = 0$$

admet une solution unique et l'algèbre linéaire nous dicte que pour cela il faut et il suffit que le déterminant

$$\begin{vmatrix} a & b\alpha \\ b & a + b\beta \end{vmatrix} = \left(a + \frac{1}{2}b\beta\right)^2 - \frac{b^2}{4}(\beta^2 + 4\alpha)$$

soit non-zéro **pour tout choix** de $(a, b) \neq (0, 0)$. Ceci sera le cas si et seulement si $\beta^2 + 4\alpha < 0$ car autrement l'équation quadratique réelle qu'est le déterminant admettrait des solutions réelles non triviales pour a et b .

SECTION 1.3

Problème 1.17 On observe simplement que $|zw|^2 = (zw)(\overline{z\bar{w}}) = (zw)(\bar{z}\bar{w}) = (z\bar{z})(w\bar{w}) = |z|^2|w|^2$ et le résultat suit immédiatement car, dans \mathbb{R} , $\sqrt{u^2} = |u|$.

Problème 1.18 Ici $|z| = |(z - w) + w| \leq |z - w| + |w|$ d'où $|z - w| \geq |z| - |w|$. Mais, par symétrie, $|z - w| = |w - z| \geq |w| - |z|$. Donc, $|z - w| \geq ||z| - |w||$.

Problème 1.19

$$\begin{aligned} |\alpha + \beta|^2 + |\alpha + \bar{\beta}|^2 &= 2\alpha\bar{\alpha} + 2\beta\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta + \alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\bar{\beta} + \alpha\beta \\ &= 2|\alpha|^2 + 2|\beta|^2 + (\alpha + \bar{\alpha})(\beta + \bar{\beta}) \\ &= 2(|\alpha|^2 + |\beta|^2) + 4\Re(\alpha)\Re(\beta). \end{aligned}$$

Problème 1.20 Posons $\alpha = x + iy$ et considérons la fonction f à deux variables réelles définie par

$$f(x, y) = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{(x+1)^2 + y^2}.$$

Puis,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} + \frac{x+1}{\sqrt{(x+1)^2 + y^2}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} + \frac{2y}{\sqrt{(x+1)^2 + y^2}}$$

Mais, une condition nécessaire pour une valeur maximum ou minimum est que ces deux dérivées partielles s'annulent. Ceci n'est possible, pour les points à l'intérieur du cercle $x^2 + y^2 = 1$, que si $y = 0$ et on obtient la valeur minimum, $\sqrt{2}$, de f . Donc la valeur maximum doit correspondre à un point sur le cercle. Dans ce cas la substitution de cette contrainte dans f donne $g(x) = \sqrt{2}(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x})$ qui définit les valeurs de f sur le cercle ($-1 < x \leq 1$). Ici,

$$g'(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x}} + \frac{1}{\sqrt{1+x}} \right)$$

et $g'(x) = 0$ si et seulement si $x = 0 \Rightarrow f(0, 1) = 2\sqrt{2}$.

Problème 1.21 La partie imaginaire de $(1+ic)^5$ est $c(c^4 - 10c^2 + 5)$ et cette fonction de c s'annule pour les cinq valeurs réelles $0, \pm\sqrt{5 \pm \sqrt{5}}$.

Problème 1.23 Il est clair que $z = 0$ n'est pas une solution. Donc, si $z = x + iy$, $x^2 + y^2 - 2x - 1 + 2iy = 0$ d'où $y = 0$ et $x = 1 \pm \sqrt{2}$.

Problème 1.24 On observe que

$$|1 + \bar{z}_1 z_2|^2 - |z_1 + z_2|^2 = 1 + |z_1||z_2| - |z_1| - |z_2| = (1 - |z_1|)(1 - |z_2|)$$

qui, si $|z_1| \leq 1$ et $|z_2| \leq 1$, doit être non-négatif.

Problème 1.25 Ici $|1+z| = 1+|z| \Rightarrow (1+z)(1+\bar{z}) = 1+2|z|+|z|^2$ d'où $\frac{1}{2}(z+\bar{z}) = \Re(z) = |z|$. Si $z = x + iy$ ceci se traduit par $x = \sqrt{x^2 + y^2}$ et, nécessairement, $y = 0$. Donc, z est réel.

Problème 1.26

- (a) L'intérieur du cercle de rayon 2 centré à l'origine;
- (b) L'extérieur du cercle de rayon 2 centré à l'origine;
- (c) Une hyperbole avec les droites $y = \pm x$ comme asymptotes;
- (d) Une hyperbole avec les axes des coordonnées comme asymptotes;
- (e) Les points à l'intérieur de l'oval de Cassini $(x^2 + y^2)((x-1)^2 + y^2) = 1$. (Voir la figure 11.1 ci-après)
- (f) L'extérieur du cercle de rayon $1/\alpha$ centré à l'origine;
- (g) Écrivons l'inéquation comme $|z-1| \leq |z+1|$ ou, si $z = x + iy$

$$(x-1)^2 + y^2 \leq (x+1)^2 + y^2 \Rightarrow 0 \leq 4x \Rightarrow \Re(z) \geq 0.$$

Donc, l'inéquation est satisfaite pour tout z du demi-plan $\{z : \Re(z) \geq 0\}$.

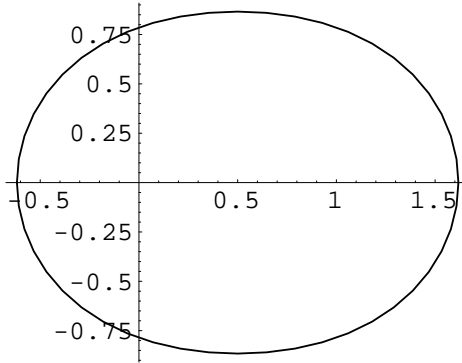


Figure 11.1: Oval de Cassini

SECTION 1.4

Problème 1.29

- (a) $\pm(1 + i\sqrt{3}), \pm(\sqrt{3} - i)$; (b) $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i), \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)$;
 (c) $\pm(1 + 2i)$; (d) $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}), -1, \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})$.

Problème 1.30 Si $\theta_1 = \arg(z_1), \theta_2 = \arg(z_2)$ alors $\Re(z_1 \bar{z}_2) = |z_1||z_2| \cos(\theta_1 - \theta_2)$ et $|z_1||z_2| = |z_1||z_2| \cos(2k\pi), k \in \mathbb{Z}$. Donc $\cos(\theta_1 - \theta_2) = \cos(2k\pi)$ entraînant $\theta_1 = \theta_2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Problème 1.31 On observe que $|z_1 - z_2|^2 = ||z_1| - |z_2||^2$ si et seulement si $z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = 2|z_1||z_2|$ d'où $\Re(z_1 \bar{z}_2) = |z_1||z_2|$ et le problème est équivalent au Problème 1.10.

Problème 1.32

$$\begin{aligned} T_1(x) &= x, & S_0(x) &= 1; \\ T_2(x) &= 2x^2 - 1, & S_1(x) &= 2x; \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x, & S_2(x) &= 4x^2 - 1; \\ T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1, & S_3(x) &= 8x^3 - 4x. \end{aligned}$$

Problème 1.33 Avec la condition $|z|^2 = x^2 + y^2 = 1$ on trouve que

$$\begin{aligned} (x + iy)^5 &= x^5 - 19x^3y^2 + 5xy^4 + i[5x^4y - 10x^2y^3 + y^5] \\ &= x^5 - 10x^3(1 - x^2) + 5x(1 - x^2)^2 + iy[5x^4 - 10x^2(1 - x^2) + (1 - x^2)^2] \\ &= 16x^5 - 20x^3 + 5x + iy[16x^4 - 12x^2 + 1] \\ &= T_5(x) + iyS_4(x). \end{aligned}$$

et pour ce problème $T_5(x) = 0$ et $yS_4(x) = 1$. Vu que x doit être positif, il faut que x satisfasse l'équation $16x^4 - 20x^2 + 5 = 0$ qui a deux racines positives, à savoir

$$x = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}}.$$

Or, une évaluation directe montre que $S_4\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}\right) < 0$ qui forcerait $y < 0$ de telle sorte que la seule solution possible est

$$x_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}}, \quad y_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}}.$$

Mais, en coordonnées polaires, $z^5 = i$ avec $|z| = 1$ est équivalent à $5\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ et notre solution correspond au cas où $k = 0$ ($\theta = \pi/10 = 18^\circ$). Donc, $\cos(\pi/10) = x_1$ et $\sin(\pi/10) = y_1$.

Problème 1.34 Si $R = \cos(2\pi/n) + i \sin(2\pi/n)$ les racines de $1 + 0i$ sont R^0, R^1, \dots, R^{n-1} de telle sorte que la transformation T définie par $T : R^k \mapsto k \bmod n$ établit un isomorphisme entre les n -ième racines de $1 + 0i$ et le groupe des entiers modulo n .

Problème 1.36 D'après la discussion dans le texte

$$\sin q \left(\frac{p\pi}{q} \right) = yS_{q-1}(x) = 0.$$

Le polynôme S_{q-1} ne contient que les puissances pairs de x et il peut s'écrire comme un polynôme à coefficients entiers en y par le biais de la substitution $x = \sqrt{1 - y^2}$. (Rappelons que $x^2 + y^2 = 1$ ici.) Donc, $\sin \frac{p\pi}{q}$ satisfait soit $y = 0$ soit $S_{q-1}(\sqrt{1 - y^2}) = 0$. Dans les deux cas on tire que $y = \sin \frac{p\pi}{q}$ est algébrique.

Problème 1.37 Ceci est un attrape! Si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\cos \theta = \frac{1}{2} \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right)$ alors

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 = \frac{1}{4} \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right)^2 + \sin^2 \theta$$

d'où

$$\sin^2 \theta = 1 - \frac{1}{4} \left(\alpha^2 + 2 + \frac{1}{\alpha^2} \right) = -\frac{1}{4} \left(\alpha - \frac{1}{\alpha} \right)^2 \leq 0.$$

Donc, les seules valeurs possibles pour α sont $\alpha = \pm 1$ et il est trivialement vrai que la formule pour $2 \cos n\theta$ est correcte.

SECTION 1.5

Problème 1.38

	Forme isotrope	Forme paramétrique
(a)	$\left(\frac{3}{2} + i\right)z - \left(\frac{3}{2} - i\right)\bar{z} - 7i = 0$	$z = \frac{7}{3}i + \left(1 - \frac{2}{3}i\right)t$
(b)	$z - (-i)\bar{z} + 6i = 0$	$z = 3 + it$
(c)	$(2 + i)z - (2 - i)\bar{z} + 10i = 0$	$z = -\frac{5}{2}i + \left(1 - \frac{1}{2}\right)t$
(d)	$z - \bar{z} - 4i = 0$	$z = 2i + t$

Problème 1.39

$$(a) \quad (1 - i)z - (1 + i)\bar{z} = 0, \quad (b) \quad z = (1 + i)t, \quad (c) \quad z + \bar{z} = 0.$$

Problème 1.40 Si $A = a_1 + ia_2$ la substitution dans l'équation isotrope de la droite révèle que la forme implicite réelle de l'équation est

$$-a_2x + a_1y + c = -\Im(A)x + \Re(A)y + c = 0.$$

Si $\Re(A) \neq 0$ la pente de la droite est $m = \Im(A)/\Re(A)$ qui est aussi le tangent de l'angle fait par l'axe des x positifs et le « vecteur » A . Si $\Re(A) = 0$ ce vecteur et la droite sont verticaux.

Problème 1.41 Supposons que les droites sont:

$$\bar{A}z - A\bar{z} + 2ic = 0 \quad \text{et} \quad \bar{B}z - B\bar{z} + 2id = 0$$

où $c, d \in \mathbb{R}$. Si $A = a_1 + ia_2$ et $B = b_1 + ib_2$, les deux étant évidemment différents de $0 + 0i$, on trouve que

$$\frac{A}{\bar{A}} + \frac{B}{\bar{B}} = \frac{A\bar{B} + \bar{A}B}{\bar{A}\bar{B}} = \frac{2(a_1b_1 + a_2b_2)}{\bar{A}\bar{B}}$$

Donc, la somme des pseudo-pentes est zéro si et seulement si $a_1b_1 + a_2b_2 = 0$. Si $a_1 = 0$ la première droite est verticale et, vu que a_2 doit être différente de zéro dans ce cas, l'autre droite est forcément horizontale. Si $a_2 = 0$, le même type de raisonnement s'applique (sauf qu la première droite est horizontale et la deuxième verticale). Donc on peut dorénavant considérer que les quatre quantités a_1, a_2, b_1, b_2 soient $\neq 0$. Il s'ensuit que le produit des pentes des deux droites est $(a_2/a_1)(b_2/b_1) = -1$, qui est la condition d'orthogonalité classique.

Problème 1.42

(a) Une droite.

(b) L'équation implique que $x = 0$ et $y^2 + 1 = 0$ et ceci est impossible vu que $y \in \mathbb{R}$. Donc le graphique est vide.

(c) Encore il s'agit d'une équation impossible si $x, y \in \mathbb{R}$. En effet, la partie imaginaire donne la contradiction $5 = 0$. (Le graphique est vide.)

Problème 1.44 Supposons que l'équation de la droite en forme implicite soit $ax + by + c = 0$ où on considère a, b et c comme les inconnus. Si (x, y) est un point quelconque sur la droite nous avons le système d'équations

$$ax + by + c = 0, \quad ax_1 + by_1 + c = 0, \quad ax_2 + by_2 + c = 0.$$

D'après un résultat d'algèbre linéaire ce système a une solution non-triviale pour a, b, c ssi

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Or, si $z = x + iy$, $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$

$$\begin{aligned} 0 = 4i\Delta &= \begin{vmatrix} z + \bar{z} & z - \bar{z} & 1 \\ z_1 + \bar{z}_1 & z_1 - \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 + \bar{z}_2 & z_2 - \bar{z}_2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z & -\bar{z} & 1 \\ z_1 & -\bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & -\bar{z}_2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{z} & z & 1 \\ \bar{z}_1 & z_1 & 1 \\ \bar{z}_2 & z_2 & 1 \end{vmatrix} = \\ & -2 \begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

d'où le résultat suit immédiatement.

Problème 1.45 D'abord, peu importe les valeurs en question, l'égalité des matrices suit des calculs suivants:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} x_1 + iy_1 & x_1 - iy_1 & 1 \\ x_2 + iy_2 & x_2 - iy_2 & 1 \\ x_3 + iy_3 & x_3 - iy_3 & 1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} x_1 & x_1 & 1 \\ x_2 & x_2 & 1 \\ x_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & -iy_1 & 1 \\ x_2 & -iy_2 & 1 \\ x_3 & -iy_3 & 1 \end{vmatrix} \\ &+ \begin{vmatrix} iy_1 & x_1 & 1 \\ iy_2 & x_2 & 1 \\ iy_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} iy_1 & -iy_1 & 1 \\ iy_2 & -iy_2 & 1 \\ iy_3 & -iy_3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -i \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} + i \begin{vmatrix} y_1 & x_1 & 1 \\ y_2 & x_2 & 1 \\ y_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -2i \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Or, le résultat est trivialement vrai si les trois points ne sont pas distincts. La droite déterminée par les points distincts (x_2, y_2) et (x_3, y_3) est

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

et les trois points sont alignés si et seulement si (x_1, y_1) satisfait cette équation.

Problème 1.46

$$(a) \quad (1 - i)Z - (1 + i)\bar{z} = 0 \quad (b) \quad Z - \bar{z} + 4i = 0.$$

Problème 1.47 Supposons que $z \xrightarrow{R_L} Z$ et $Z \xrightarrow{R_L} W$. Alors,

$$W = \frac{A\bar{Z} - 2ic}{A} = \frac{A\left(\frac{\bar{A}z + 2ic}{A}\right) - 2ic}{A} = z$$

impliquant que R_L^2 est l'identité.

Problème 1.48 Soit l'équation de la droite $L : \bar{A}z - A\bar{z} + 2ic = 0$, $c \in \mathbb{R}$ la droite qui définit la réflexion R_L . Si, par R_L , $z_1 \mapsto Z_1$ et $z_2 \mapsto Z_2$ nous avons

$$\bar{A}Z_1 - A\bar{z}_1 + 2ic = 0 \quad \text{et} \quad \bar{A}Z_2 - A\bar{z}_2 + 2ic = 0$$

d'où on tire

$$\bar{A}(Z_1 - Z_2) = A(z_1 - z_2) \quad \Rightarrow \quad |Z_1 - Z_2| = |z_1 - z_2|.$$

Soient L_1, L_2 deux droites qui passent par un point z_0 . Si θ_1, θ_2 sont les angles d'intersection de ces droites avec l'axe réel, ces droites peuvent se voir associées les équations paramétriques

$$L_1 : z = z_0 + te^{i\theta_1} \quad \text{et} \quad L_2 : z = z_0 + te^{i\theta_2}.$$

Si z_1, z_2 sont les points sur les droites L_1, L_2 qui correspondent au choix $t = 1$ dans les équations paramétriques notons par Z_0, Z_1, Z_2 les images de z_0, z_1, z_2 par la réflexion R_L . Alors,

$$\frac{Z_1 - Z_0}{Z_2 - Z_0} = \frac{\bar{z}_1 - \bar{z}_0}{\bar{z}_2 - \bar{z}_0} = e^{\theta_2 - \theta_1}.$$

Donc, l'angle entre les images des droites L_1 et L_2 est le négatif de celui déterminé par L_1 et L_2 avant la réflexion.

Problème 1.49 On peut supposer que le point d'intersection des deux droites est l'origine. Dans ce cas les équations de L_1 et L_2 peuvent s'écrire comme $\bar{A}z - A\bar{z} = 0$ et $\bar{B}z - B\bar{z} = 0$ où $|A| = |B| = 1$. Donc, $A = e^{i\alpha}$ et $B = e^{i\beta}$ où α et β sont des angles que font A et B respectivement par rapport à l'axe des x positifs. Les réflexions se définissent par

$$R_{L_1} : \bar{A}Z - A\bar{z} = 0 \quad \text{et} \quad R_{L_2} : \bar{B}W - B\bar{Z} = 0.$$

La composition $R_{L_1} \circ R_{L_2}$ est définie par

$$W = \frac{B}{\bar{B}} \left(\frac{\bar{A}}{A} \right) z = e^{-2i\beta} e^{2i\beta} z = e^{2i(\alpha-\beta)} z$$

ce qui représente une rotation d'angle $2(\alpha - \beta)$ autour de l'origine.

Problème 1.50 Non. Par exemple, si la translation est $T_1 : z \mapsto z + 1$ et la rotation est $R_{\pi/2} : z \mapsto iz$ alors $T_1 \circ R_{\pi/2} : z \mapsto 1 + iz$ tandis que $R_{\pi/2} \circ T_1 : z \mapsto i(1 + z)$.

Problème 1.52 Supposons que les quatre points se retrouvent sur le cercle

$$az\bar{z} + \bar{B}z + B\bar{z} + d = 0 \quad a, d \in \mathbb{R}, \quad ad \neq 0, \quad B\bar{B} - ad > 0.$$

Alors, en solutionnant pour z

$$z = -\frac{d + B\bar{z}}{\bar{B} + a\bar{z}}.$$

Pour les points z_1 et z_3 on voit que

$$z_1 - z_3 = -\frac{d + B\bar{z}_1}{\bar{B} + a\bar{z}_1} + \frac{d + B\bar{z}_3}{\bar{B} + a\bar{z}_3} = \frac{-(d + B\bar{z}_1)(\bar{B} + a\bar{z}_3) + (\bar{B} + a\bar{z}_1)(d + B\bar{z}_3)}{(\bar{B} + a\bar{z}_1)(\bar{B} + a\bar{z}_3)} = \frac{(\bar{z}_1 - \bar{z}_3)(ad - B\bar{B})}{(\bar{B} + a\bar{z}_1)(\bar{B} + a\bar{z}_3)}$$

De façon semblable

$$z_1 - z_4 = \frac{\bar{z}_1 - \bar{z}_4}{(\bar{B} + a\bar{z}_1)(\bar{B} + a\bar{z}_3)}(ad - B\bar{B})$$

Alors,

$$\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} = \frac{\bar{B} + a\bar{z}_4}{\bar{B} + a\bar{z}_3} \overline{\left(\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} \right)}$$

et, par symétrie

$$\frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4} = \frac{\bar{B} + a\bar{z}_4}{\bar{B} + a\bar{z}_3} \overline{\left(\frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4} \right)}.$$

Il est maintenant clair que $B_r(z_1, z_2; z_3, z_4) = \overline{B_r(z_1, z_2; z_3, z_4)}$ ce qui entraîne que $B_r(z_1, z_2; z_3, z_4) \in \mathbb{R}$. Vu que chaque étape de l'argument marche dans les deux sens les conditions du problème sont nécessaires et suffisantes.

Problème 1.54

- (a) $2z\bar{z} + (2 + 3i)z + (2 - 3i)\bar{z} - \frac{3}{2} = 0;$
- (b) $4z\bar{z} + (-2 + 5i)z + (-2 - 5i)\bar{z} - 23 = 0;$
- (c) $z\bar{z} + (-5 + i)z + (-5 - i)\bar{z} - 16 = 0.$

Problème 1.55

- (a) La droite verticale qui passe par $(\frac{1}{2}, 0)$;
- (b) Si $\alpha = 0$ l'image est l'axe des y . Autrement, is s'agit du cercle $\alpha z\bar{z} + z + \bar{z} = 0$. En effet l'image est le cercle centré au point $(-1/\alpha, 0$ de rayon $1/|\alpha|$;
- (c) L'ensemble vide \emptyset car aucun z ne satisfait l'équation!;
- (d) Supposons que le triangle soit non-dégénéré et que l'origine n'est pas un sommet et ne se retrouve pas sur un côté. Dans ce cas chaque côté se transforme dans un segment de droite, si la prolongation du côté passe par l'origine, ou un arc de cercle dans le cas contraire.
- Si l'origine est un sommet le côté déterminé par les deux autres sommets est un arc de cercle (jamais un segment de droite!) et les deux autres côtés se transforment en demi-droites partant des images des deux sommets $\neq 0 + 0i$.
- Si l'origine est un point intérieur d'un des côtés ce dernier devient une droite avec un segment contenant l'origine enlevé. Les deux autres côtés sont des arcs de cercle.
- (e) La courbe cubique $x^2 + y(x^2 + y^2) = 0$.

SECTION 1.7

Problème 1.65 Si S est un ouvert alors $S^\circ = Z$. En particulier, si Ω est un ensemble quelconque, $S = \Omega^\circ$ est un ouvert d'où $S^\circ = (\Omega^\circ)^\circ = S = \Omega^\circ$.

Si $A \subseteq B$ et $A^\circ \not\subseteq B^\circ$ alors il existe $z_0 \in A^\circ$ tel que $z_0 \notin B^\circ$. Mais, dans ce cas $z_0 \notin B$ tandis que $z_0 \in A^\circ \rightarrow z_0 \in A$. Ceci contredit l'hypothèse $A \subseteq B$.

11.2 Problèmes du Chapitre II

SECTION 2.1

Problème 2.2

A)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow i} \frac{iz^2 - 1}{z - i} &= \lim_{x \rightarrow i} \frac{i(z^3 - i^3)}{z - i} \\ &= \lim_{x \rightarrow i} \frac{i(z - i)(z^2 + iz + i^2)}{z - i} \\ &= \lim_{x \rightarrow i} i(z^2 + iz - 1) = -3i \end{aligned}$$

B) Si $Q(z_0) \neq 0$ alors $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{P(z_0)}{Q(z_0)}$. Si $Q(z_0) = 0$ et $P(z_0) \neq 0$ alors $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{P(z)}{Q(z)} = \infty$. Si $P(z_0) = Q(z_0) = 0$ alors il existe des entiers positifs j et k tels que $P(z) = (z - z_0)^k p(z)$ et $Q(z) = (z - z_0)^j q(z)$ où $p(z_0) \neq 0$ et $q(z_0) \neq 0$. Dans ce cas

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{P(z)}{Q(z)} = \begin{cases} p(z_0)/q(z_0) & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } k > j \\ \infty & \text{si } k < j \end{cases}$$

C) $\lim_{z \rightarrow i} \frac{z+3}{z^2-i} = \frac{3+i}{-1-i} = -2 + i$

Problème 2.4

A) En coordonnées polaires

$$\frac{\Re(z^2)}{|z|^2} = \frac{r^2 \cos 2\theta}{r^2} = \cos 2\theta$$

et, lorsque $z \rightarrow 0$, $r \rightarrow 0$ mais θ peut être une valeur quelconque entre -1 et $+1$. Vu que la limite doit être unique lorsqu'elle existe, on conclut que $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\Re(z^2)}{|z|^2}$ n'existe pas.

B) Encore en coordonnées polaires

$$\frac{\Im(z^2)}{z} = \frac{r^2 \sin 2\theta}{r} = r \sin 2\theta$$

et, lorsque $r \rightarrow 0$, cette quantité tend vers zéro peu importe la valeur de θ . Donc, $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\Im(z^2)}{|z|}$.

SECTION 2.2

Problème 2.7 Notons que si $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{\Delta x}{\Delta x + i\Delta y}.$$

Mais, $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x + i\Delta y}$ n'existe pas! Ceci suit, par exemple, du fait que si $\Delta y = \Delta x$ et on laisse $\Delta x \rightarrow 0$, la fraction devient $\frac{1}{2}(1 - i)$ et si $\Delta y = -\Delta x$ la fraction devient $\frac{1}{2}(1 + i)$ donc la limite qui définit la dérivée n'existe pas.

Problème 2.8 Notons que

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{(2x + ay)\Delta x + (ax + 2by)\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} + \frac{\Delta^2 x + \Delta^2 y}{\Delta x + i\Delta y}.$$

Or, $\left| \frac{\Delta^2 x + \Delta^2 y}{\Delta x + i\Delta y} \right| = |\Delta z| \rightarrow 0$ lorsque $\Delta z \rightarrow 0$. Mais,

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(2x + ay)\Delta x + (ax + 2by)\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}$$

ne saurait exister que si x et y satisfassent le système d'équations homogènes

$$2x + ay = 0, \quad ax + 2by = 0.$$

Une solution est $x = y = 0$ et, si $4b = a^2$, il y aura une infinité de solutions qui correspondent aux points de la droite $ax = y$. Néanmoins, il n'y a aucun point où la fonction f est régulière.

Problème 2.10 Les singularités correspondent aux points où $z^4 + 1 = 0$. Vu que

$$\begin{aligned} z^4 + 1 &= (z^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}z)^2 \\ &= (z^2 + \sqrt{2}z + 1)(z^2 - \sqrt{2}z + 1) = 0 \end{aligned}$$

on trouve les quatre points (les racines des deux équations quadratiques)

$$z = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \pm i \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Problème 2.12 Pour la fonction $|z|^2 = x^2 + y^2$ on note que

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{2x\Delta x + 2y\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} + \frac{|\Delta x + i\Delta y|^2}{\Delta x + i\Delta y}.$$

Comme dans le Problème 2.8 la limite qui définit la dérivée ne saurait exister que si $x = y = 0$ et la fonction y est monogène (main non régulière).

Pour la fonction $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{2x\Delta x + 2y\Delta y + \Delta^2 x + \Delta^2 y}{(\Delta x + i\Delta y)(\sqrt{(x + \Delta x)^2 + (y + \Delta y)^2} + \sqrt{x^2 + y^2})}.$$

Si la limite de cette expression existait il faudrait qu'elle soit égale à

$$\begin{aligned} &\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{2x\Delta x + 2y\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} \cdot \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{(x + \Delta x)^2 + (y + \Delta y)^2} + \sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{2x\Delta x + 2y\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} \end{aligned}$$

Il est clair que la dernière limite n'existe que si $x = y = 0$ mais dans ce cas le coefficient $(2\sqrt{x^2 + y^2})^{-1}$ est infini. Il s'ensuit que la fonction $|z|$ n'est dérivable nulle part.

SECTION 2.3

Problème 2.15 Ici la longueur d'arc est définie par

$$s = s(t) = \int_0^t \sqrt{1 + \tan^2 t} = u \, du$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^t \sec u \, du \\
&= \log \left| \tan \left(\frac{u}{2} \right) + \left(\frac{\pi}{4} \right) \right| \Big|_0^t \\
&= \log \left| \tan \left(\frac{t}{2} \right) + \left(\frac{\pi}{4} \right) \right|
\end{aligned}$$

d'où $t = 2 \left(e^s - \frac{\pi}{4} \right)$ et

$$z(s) = \log \left| \sec \left(2e^s - \frac{\pi}{2} \right) \right| + 2i \left(e^s - \frac{\pi}{4} \right).$$

Problème 2.17 Voici deux possibilités.

$$\begin{aligned}
\text{A)} \quad &x = \cos t, \quad y = 2 \sin t \quad (0 \leq t < 2\pi) \\
\text{B)} \quad &x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad y = \frac{4t}{1+t^2} \quad (-\infty < t < +\infty)
\end{aligned}$$

SECTION 2.4

Problème 2.18

$$\begin{aligned}
\text{A)} \quad &\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2i\theta} & \text{B)} \quad &-\frac{i}{2} + \frac{i}{2}e^{-2i\theta} \\
\text{C)} \quad &e^x(\cos y + i \sin y) & \text{D)} \quad &e^{-2i\theta} \\
\text{E)} \quad &\frac{1}{2} \cosh x(1 + e^{-2i\theta}) & \text{F)} \quad &\frac{1}{1+\bar{z}} - \frac{1+z}{(1+\bar{z})^2}e^{-2i\theta}
\end{aligned}$$

Problème 2.20 Vu que $f'(z) = 1 + e^{-2i\theta}$, le cercle de Kasner est, dans le plan des dérivées, $|\gamma - 1| = |e^{-2i\theta}| = 1$ qui est un cercle de rayon 1 centré au point $(1, 0)$.

Problème 2.21 Pour ces points il faut que $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 2z\bar{z} - 2 = 0$. Donc, f est monogène pour chaque point du cercle unitaire défini par $|z| = 1$.

Problème 2.22 Ici il faut que $\frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$. Vu que ϕ ne dépend que de la seule variable réelle x on conclut que $\phi \equiv \text{const}$. Donc, seules les fonctions réelles identiquement constantes peuvent être holomorphes.

Problème 2.24

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) (\phi + i\psi) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)
\end{aligned}$$

$$= \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)}.$$

Problème 2.26 A) Ceci suit immédiatement du fait que si f est de classe C^2 alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{d^2 f}{dy^2} \right) = \frac{1}{4} \nabla^2 f.$$

Problème 2.27 Non. C'est l'angle de phase associé à la dérivée polygène. En effet si

$$\begin{aligned} f' &= f_z + f_{\bar{x}} e^{-2i\theta_1} \\ g' &= g_z + g_{\bar{z}} e^{-2i\theta_2} \\ (fg)' &= (fg)_z + (fg)_{\bar{x}} e^{-2i\theta} \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} (fg)' &= (fg_z + f_z g) + (fg_{\bar{z}} + f_{\bar{z}} g) e^{-2i\theta} \\ fg' + f'g &= fg_z + gf_z + fg_{\bar{z}} e^{-2i\theta_2} + gf_{\bar{z}} e^{-2i\theta_1}. \end{aligned}$$

Étant donné que les trois angles varient de manière indépendante l'égalité $(fg)' = (fg' + f'g)$ n'est valide que dans les cas exceptionnels.

SECTION 2.5

Problème 2.29 Ceci suit du fait que $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 4iy$ qui n'est zéro que si $y = 0 \Rightarrow z \in \mathbb{R}$.

Problème 2.30 À partir des équations $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ qui détermine les relations entre les coordonnées cartésiennes et polaires on trouve qu'en considérant r et θ comme des fonctions de x et y

$$\begin{aligned} 1 &= r_x \cos \theta - \theta_x r \sin \theta \\ 0 &= r_x \sin \theta + \theta_x r \cos \theta \\ 1 &= r_y \sin \theta + \theta_y r \cos \theta \\ 0 &= r_y \cos \theta - \theta_y r \sin \theta \end{aligned}$$

d'où on déduit

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos \theta, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\sin \theta}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \sin \theta, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos \theta}{r}.$$

Or,

$$2 \frac{\partial f}{\partial z} = f_x - i f_y$$

$$\begin{aligned}
&= f_r \cos \theta - f_\theta \frac{\sin \theta}{r} - i f_r \sin \theta - i f_\theta \frac{\cos \theta}{r} \\
&= \frac{1}{r} (r f_r (\cos \theta - i \sin \theta) + f_\theta (-\sin \theta - i \cos \theta)) \\
&= \frac{1}{r} (r f_r - i f_\theta) (\cos \theta - i \sin \theta) \\
&= \frac{1}{r(\cos \theta + i \sin \theta)} (r f_r - i f_\theta) \\
&= \frac{1}{z} (r f_r - i f_\theta).
\end{aligned}$$

Donc, en coordonnées polaires

$$\frac{f}{z} = \frac{1}{2z} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} - i \frac{\partial f}{\partial \theta} \right).$$

Le résultat pour la dérivée $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ se déduit de manière semblable.

Problème 2.31 Si $f(z) = \sqrt{r} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right)$ où $r > 0$ et $-\pi < \theta < \pi$, prouver que $f'(z)$ existe.

PROBLÈMES DIVERS

Problème 2.33

A) 1 B) $\frac{-36 + 48i}{25}$

11.3 Problèmes du Chapitre III

SECTION 3.1

Problème 3.1 Elle n'est dérivable dans aucun ouvert de \mathbb{C} .

Problème 3.3 Il suit du fait que $\frac{\partial R}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{z-1}$, qui n'est jamais zéro dans \mathbb{C} , qu'il n'existe aucun point de \mathbb{C} où R est dérivable.

Problème 3.4 La condition implique que $\frac{\partial f}{\partial z} \equiv 0$ pour toute valeur de z . Donc, le polynôme P ne dépend que de \bar{z} et il peut s'écrire comme

$$P(z) = \alpha + \beta \bar{z} + \gamma \bar{z}^2, \quad (\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}).$$

Problème 3.5

A) $\frac{1}{2z} + \frac{1}{2\bar{z}}$ B) $e^z + e^{\bar{z}}$ C) $\frac{1}{z^2} + \frac{1}{\bar{z}^2}$ D) Impossible

SECTION 3.2

Problème 3.7

$$\text{A)} \quad \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3} + i) \qquad \text{B)} \quad 1 - \sqrt{3}$$

Problème 3.9

$$\begin{aligned} \text{A)} \quad & \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} + \frac{i}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}, \quad \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}} + \frac{i}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}, \\ & -\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} + \frac{i}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}, \quad -\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}} + \frac{i}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} \\ \text{B)} \quad & 1, \quad \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad -1, \quad -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Problème 3.10 Observons que

$$\frac{1+a}{1-\bar{a}} = \frac{(1-a)(1-\bar{a})}{(1-a)(1-\bar{a})} = \frac{1-|a|^2 + 2i\Im(a)}{1+|a|^2 - 2\Re(a)}.$$

Donc, vu que $|a| < 1$ on déduit que si $\theta = \text{Arg} \frac{1+a}{1-\bar{a}}$ alors $\cos \theta > 0$ ce qui veut dire que $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ et $|\theta| < \frac{\pi}{2}$.

SECTION 3.3

Problème 3.12

$$\begin{aligned} \cos iz &= \frac{e^{i(iz)} + e^{-i(iz)}}{2} = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cosh z \\ \sin iz &= \frac{e^{i(iz)} - e^{-i(iz)}}{2i} = i \frac{e^z - e^{-z}}{2} = i \sinh z \end{aligned}$$

Problème 3.14 En utilisant les formules du Problème 3.12 on trouve que

$$\begin{aligned} \cos z = \cos(x + iy) &= \cos x \cos iy - \sin x \sin iy \\ &= \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y \\ \sin z = \sin(x + iy) &= \sin x \cos iy + \sin iy \cos x \\ &= \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} |\cos z|^2 &= \cos^2 x \cosh^2 y + \sin^2 x \sinh^2 y \\ |\sin z|^2 &= \sin^2 x \cosh^2 y + \cos^2 x \sinh^2 y \end{aligned}$$

et, finalement

$$|\cos z|^2 + |\sin z|^2 - 1 = \cosh^2 y + \sinh^2 y - 1 = 2 \sinh^2 y \geq 0.$$

Il est clair que l'égalité ne tient que si $y = \Re(z) = 0$.

Problème 3.17 Posons

$$\begin{aligned} S &= e^{i\theta} + e^{2i\theta} + e^{3i\theta} + \dots + e^{in\theta} \\ &= \cos \theta + \cos 2\theta + \dots + \cos n\theta + i(\sin \theta + \sin 2\theta + \dots + \sin n\theta) \\ &= \frac{e^{i\theta} - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} \\ &= \frac{(e^{i\theta} - e^{i(n+1)\theta})(1 - e^{-i\theta})}{(1 - e^{i\theta})(1 - e^{-i\theta})} \\ &= \frac{(e^{\frac{i\theta}{2}} - e^{-\frac{i\theta}{2}})(e^{\frac{i\theta}{2}} - e^{i(n+\frac{1}{2})\theta})}{2 - 2 \cos \theta} \\ &= \frac{2i \sin \frac{\theta}{2}}{4 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \left(e^{\frac{i\theta}{2}} - e^{i(n+\frac{1}{2})\theta} \right) \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{\theta}{2}} \left[-\sin \frac{\theta}{2} + \sin(n + \frac{1}{2})\theta + i(\cos \frac{\theta}{2} - \cos(n + \frac{1}{2})\theta) \right]. \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} \Im(S) &= \frac{\cos \frac{\theta}{2} - \cos(n + \frac{1}{2})\theta}{2 \sin \frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{-2 \sin \frac{n+1}{2}\theta \sin(-\frac{n}{2})\theta}{2 \sin \frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{\sin \frac{n\theta}{2} \sin \frac{n+1}{2}\theta}{\sin \frac{\theta}{2}} \end{aligned}$$

qui correspond à l'identité **B**. Pour établir **A** on note que

$$\begin{aligned} \Re(S) &= \frac{\sin(n + \frac{1}{2})\theta - \sin \frac{\theta}{2}}{2 \sin \frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{\cos \frac{n+1}{2}\theta \sin \frac{n}{2}\theta}{\sin \frac{\theta}{2}} \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \Re(S) &= \frac{\sin(n + \frac{1}{2})\theta - \sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2}}{2 \sin \frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{\sin(n + \frac{1}{2})\theta}{2 \sin \frac{\theta}{2}}. \end{aligned}$$

Problème 3.21 On trouve facilement que $|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y$ et, en particulier, si $z = \frac{\pi}{2} + iy$ $|\sin(\frac{\pi}{2} + iy)| = 1 + \sinh^2 y > 1$. Donc, il faut restreindre z à l'ensemble des réels pour assurer que $|\sin z| \leq 1$.

Problème 3.23 Par exemple, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \sin \bar{z} = 0$ si et seulement si $z \in \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ qui est un ensemble de points isolés. Donc, il n'existe aucun point z qui admet un ϵ -voisinage $V(z, \epsilon)$ qui contient uniquement des points où $\sin \bar{z}$ soit dérivable ce qui veut dire que $\sin \bar{z}$ n'est régulière nulle part. Un argument similaire s'applique à la fonction $\cos \bar{z}$.

SECTION 3.4

Problème 3.25 Notons que $z = \sin w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}$ d'où on déduit que

$$e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0.$$

ceci est une équation quadratique en e^{iw} dont les solutions peuvent s'exprimer comme

$$e^{iw} = iz + \sqrt{z^2 - 1}.$$

Donc, $w = -i \log(iz + \sqrt{z^2 - 1})$.

Problème 3.27

$$\text{B) } z = k\pi + i \log 3, \quad (k \in \mathbb{Z}) \qquad \text{C) } z = 2k\pi, \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Problème 3.30 Quelles sont les courbes déterminées par

$$|z^\alpha| = \text{constante} \quad \text{et} \quad \arg z^\alpha = \text{constante}.$$

PROBLÈMES DIVERS

Problème 3.31 Si $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$, $a_k \in \mathbb{R}$ alors, si z est une racine de $P(z)$

$$\bar{0} = 0 = \overline{P(z)} = \sum_{k=0}^n \overline{a_k z^k} = \sum_{k=0}^n a_k \bar{z}^k$$

d'où \bar{z} est aussi une racine. Si les coefficients ne sont pas tous réels et si z est une racine de $P(z)$ alors \bar{z} sera une racine de $\bar{P}(z)$ qui est le polynôme P avec chaque coefficient remplacé par son conjugué \bar{a}_k .

Problème 3.32 Rappelons que si $n \in \mathbb{N}$ $w^n - 1 = (w - 1)(1 + w + w^2 + \dots + w^{n-1})$. Si $w = e^{2\pi i/n}$, $(w^{2\pi/n})^n = e^{2\pi i} = 1$ et $w - 1 = e^{2\pi i/n} - 1 \neq 0$. Donc,

$$1 + e^{\frac{2\pi i}{n}} + e^{\frac{4\pi i}{n}} + \dots + e^{\frac{2(n-1)\pi i}{n}} = 0.$$

Les deux formules se retrouvent immédiatement lorsqu'on décompose cette formule dans ces parties réel et imaginaire avec l'aide des formules de DeMoivre.

11.4 Problèmes du Chapitre IV

SECTION 4.1

Problème 4.1

$$\text{A) } \frac{1}{2} \quad \text{B) } \frac{i}{2} \quad \text{C) } \frac{49}{2} + 15i$$

Problème 4.2

$$\text{A) Non} \quad \text{B) Oui} \quad \text{C) Non} \quad \text{D) Oui}$$

Problème 4.3 Soit $G = u + iv$ l'anti-dérivée recherchée. Alors

$$\frac{\partial G}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \log \sqrt{x^2 + y^2} + i \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

et il s'ensuit que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \log \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \tan^{-1} \frac{y}{x}.$$

L'intégration partielle de ces équations par rapport à y nous donne

$$\begin{aligned} u &= \frac{x}{2} \log(x^2 + y^2) + y \tan^{-1} \frac{x}{y} - x + A(y) \\ v &= x \tan^{-1} \frac{y}{x} - y \log \frac{y}{x} + \frac{y}{2} \log \frac{x^2 + y^2}{x^2} + B(y). \end{aligned}$$

De ces équations on trouve que

$$u_y = \tan^{-1} \frac{x}{y} + A'(y), \quad v_y = -\log \frac{y}{x} + \frac{1}{2} \log \frac{x^2 + y^2}{x^2} + B'(y).$$

Maintenant, les équations de Cauchy-Riemann nous donnent les résultats suivants :

$$\begin{aligned} u_x = v_y &\Rightarrow \log \sqrt{x^2 + y^2} = -\log \frac{y}{x} + \log \sqrt{x^2 + y^2} - \frac{1}{2} \log x^2 + B'(y) \\ &\Rightarrow -\log y + B'(y) = 0 \\ &\Rightarrow B'(y) = \log y \\ &\Rightarrow B(y) = y \log y - y \\ u_y = -v_x &\Rightarrow \tan^{-1} \frac{x}{y} + A'(y) = -\tan^{-1} \frac{y}{x} \\ &\Rightarrow A'(y) = \frac{\pi}{2} \\ &\Rightarrow A(y) = \frac{\pi y}{2}. \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
 G(z) &= x \log \sqrt{x^2 + y^2} - x + y \tan^{-1} \frac{x}{y} + \frac{\pi y}{2} + i \left(x \tan^{-1} \frac{y}{x} - y \log \frac{y}{x} + \frac{y}{2} \log \frac{x^2 + y^2}{x^2} \right) \\
 &= x \log \sqrt{x^2 + y^2} - x - y \tan^{-1} \frac{y}{x} + i \left(x \tan^{-1} \frac{y}{x} - y + y \log \sqrt{x^2 + y^2} \right) \\
 &= (x + iy) (\log \sqrt{x^2 + y^2} + i \tan^{-1} \frac{y}{x}) - (x + iy) \\
 &= z \log z - z.
 \end{aligned}$$

SECTION 4.2

Problème 4.6 Si $f(t) = c$ et si P est une partition quelconque de l'intervalle $[a, b]$,

$$M_k = \sup_{t_{k-1} < t < t_k} f(t) = m_k = \inf_{t_{k-1} < t < t_k} f(t) = c.$$

Alors,

$$\bar{J}(f, g, P) = \underline{J}(f, g, P) = c \sum_{k=1}^n [g(t_k) - g(t_{k-1})] = c[g(t_n) - g(t_0)] = c[g(b) - g(a)].$$

Il en résulte que

$$\int_a^b c \, dg = \overline{\int}_a^b c \, dg = \underline{\int}_a^b c \, dg = c[g(b) - g(a)].$$

Problème 4.9 Sans perte de généralité nous pouvons supposer que $c > 0$. Alors, si P est une partition quelconque de $[a, b]$

$$\begin{aligned}
 \bar{J}(cf, g, P) &= \sum_1^n c M_k [g(t_k) - g(t_{k-1})] \\
 &= \sum_1^n M_k [cg(t_k) - cg(t_{k-1})] \\
 &= \bar{J}(f, cg, P).
 \end{aligned}$$

De façon semblable $\underline{J}(cf, g, P) = \underline{J}(f, cg, P)$ d'où

$$\int_a^b cf \, dg = \overline{\int}_a^b cf \, dg = \underline{\int}_a^b d \, d(CG) = \overline{\int}_a^b f \, d(CG).$$

SECTION 4.3

Problème 4.12 La fonction $f(t) = \begin{cases} t \sin(1/t) & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$ est continue sur $[0, 1]$. Considérons la partition P_n définie par la suite

$$\left\{ 0, \frac{2}{(2n+1)\pi}, \frac{2}{(2n-1)\pi}, \dots, \frac{2}{\pi}, 1 \right\}.$$

Alors,

$$B(f, P_n) > \sum_{k=1}^n \left| \sin \frac{2}{(2k+1)\pi} - \sin \frac{2}{(2k-1)\pi} \right| = 2n.$$

Mais la valeur de n peut être arbitrairement grande, Donc, f n'est pas à variation bornée sur l'intervalle $[0, 1]$.

SECTION 4.5

Problème 4.22 0

Problème 4.23 0

Problème 4.24

$$\text{A) } \frac{\alpha \Re(\alpha)}{2} \quad \text{B) } -\pi \quad \text{C) } 0$$

Problème 4.25 A) Si $R > 1$ on trouve que

$$\begin{aligned} \left| \int_{|z|=R} \frac{z dz}{z^3 + 1} \right| &= \int_0^{2\pi} \left| \frac{R e^{i\theta} i R e^{i\theta} d\theta}{R^3 e^{3i\theta} + 1} \right| \\ &\leq \int_0^{2\pi} \frac{R^2 d\theta}{R^3 - 1} \\ &= \frac{2\pi R^2}{R^3 - 1}. \end{aligned}$$

Lorsque $R \rightarrow \infty$ cette dernière expression tend vers 0 et le résultat recherché est établi.

SECTION 4.7

Problème 4.28 $\frac{3\pi}{2}$

Problème 4.29 0

Problème 4.30 0

11.5 Problèmes du Chapitre V

SECTION 5.1

Problème 5.1 Si $R > 0$ une application du Théorème de Cauchy nous donne

$$\int_0^R e^{-x^2} dx + \int_{C_R} e^{-z^2} dz + \int_{R\frac{\sqrt{2}}{2}} e^{-(1+i)^2 t^2} (1+i) dt = 0$$

où, sur le segment $[0, Re^{i\sqrt{2}/2}]$, $z = (1+i)t$, $t \in [0, 1]$. Sur l'arc du cercle C_R

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R} e^{-z^2} dt \right| &= \left| \int_0^{\pi/4} e^{-R^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)} R e^{i\theta} d\theta \right| \\ &\leq \int_0^{\pi/4} e^{-R^2 \cos 2\theta} R d\theta \end{aligned}$$

et, si $\theta \in (0, \frac{\pi}{4})$, $\lim_{R \rightarrow \infty} e^{-R^2 \cos 2\theta} R = 0$. Donc, $\int_{C_R} e^{-z^2} dz = 0$. Passons à la limite pour les deux autres intégrales pour trouver que

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx + \int_\infty^0 e^{-(1+i)^2 x^2} (1+i) dx = 0$$

d'où on déduit que

$$\int_0^\infty e^{-2ix^2} (1+i) dx = \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Or,

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}}{2} &= \int_0^\infty (\cos 2x^2 - i \sin 2x^2)(1+i) dx \\ \Rightarrow \int_0^\infty (\cos 2x^2 + \sin 2x^2) dx &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{et} \quad \int_0^\infty \cos 2x^2 &= \int_0^\infty \sin 2x^2 dx \end{aligned}$$

Donc, $\int_0^\infty \cos 2x^2 dx = \sqrt{\pi}/4$ et la substitution $x = u/\sqrt{2}$ nous donne

$$\int_0^\infty \cos u^2 du = \frac{\sqrt{\pi}\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \int_0^\infty \sin u^2 du.$$

Problème 5.5

- A) 0 B) $2\pi i$ C) 0 D) $2\pi i$ E) 0

Problème 5.6 On utilise la fonction $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ et le rectangle C déterminé par les deux points $(-R, 0)$ et (R, β) . Vu que $0 < \beta < 1$ le Théorème de Cauchy implique que $\int_C \frac{dz}{1+z^2} = 0$ et on déduit que

$$\int_{-R}^R \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^\beta \frac{d(R+iy)}{1+(R+iy)^2} + \int_R^{-R} \frac{d(x+i\beta)}{1+(x+i\beta)^2} + \int_\beta^0 \frac{d(-R+iy)}{1+(-R+iy)^2} = 0.$$

Observons que

$$\left| \int_0^\beta \frac{id y}{1+(R+iy)^2} \right| \leq \int_0^\beta \frac{dy}{\sqrt{(1+R^2-y^2)+4R^2y^2}} \rightarrow 0 \quad \text{si } R \rightarrow \infty$$

$$\left| \int_0^\beta \frac{id y}{1+(-R+iy)^2} \right| \leq \int_0^\beta \frac{dy}{\sqrt{(1+R^2-y^2)+4R^2y^2}} \rightarrow 0 \quad \text{si } R \rightarrow \infty$$

Donc, si $R \rightarrow \infty$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2-\beta^2)+2i\beta x} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$$

et

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1-\beta^2+x^2)dx}{(1-\beta^2+x^2)+4\beta^2x^2} - i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\beta x}{(1-\beta^2+x^2)^2+4\beta^2x^2} = \pi$$

d'où

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1-\beta^2+x^2)dx}{(1-\beta^2+x^2)+4\beta^2x^2} = \pi.$$

SECTION 5.2

Problème 5.7 Par la version complexe du Théorème de Green

$$\int_C \bar{z} dz = 2i \iint_{\text{int}(C)} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} dx dy = 2i \iint_{\text{int}(C)} dx dy = 2iA.$$

De plus,

$$\int_C \bar{z} dz = \int_C r e^{-i\theta} (e^{i\theta} dr + i r e^{i\theta} d\theta) = \int_C i r^2 d\theta + \int_C r dr = i \int_C r^2 d\theta.$$

Il s'ensuit que

$$A = \frac{1}{2i} \int_C \bar{z} dz = \frac{1}{2} \int_C r^2 d\theta.$$

Problème 5.8

$$\frac{1}{2i} \int_\Gamma \overline{f(z)} g(z) dz = \iint_{\text{int}(\Gamma)} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \overline{f(z)} g(z) dx dy$$

$$\begin{aligned}
&= \iint_{\text{int}(\Gamma)} g(z) \frac{\overline{\partial f}}{\partial z} dx dy \\
&= \iint_{\text{int}(\Gamma)} g(z) \overline{f'(z)} dx dy.
\end{aligned}$$

Problème 5.10 Tous les cercles de Kasner sont centrés au point fixe déterminé par $\frac{\partial f}{\partial z} = \text{const.}$

SECTION 5.3

Problème 5.14

$$\begin{aligned}
\nabla^2 FG &= 4 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left[F \frac{\partial G}{\partial z} + G \frac{\partial F}{\partial z} \right] \\
&= F \nabla^2 G + G \nabla^2 F + 4 \left(\frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial G}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} \frac{\partial G}{\partial z} \right)
\end{aligned}$$

Mais,

$$\nabla F \bullet \nabla G = 4 \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} \bullet \frac{\partial G}{\partial \bar{z}} = 4 \Re \left(\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} \overline{\frac{\partial G}{\partial \bar{z}}} \right) = 2 \left(\frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial G}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} \frac{\partial G}{\partial z} \right)$$

d'où

$$\nabla^2 FG = F \nabla^2 G + G \nabla^2 F + 2 \nabla F \bullet \nabla G.$$

Problème 5.15

$$\begin{aligned}
\nabla^2 |f(z)|^2 &= \nabla^2 f(z) \overline{f(z)} = 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} f(z) \overline{f(z)} \\
&= 4 f'(z) \overline{f'(z)} = 4 |f'(z)|^2.
\end{aligned}$$

Problème 5.17 Le cercle C admet les équations paramétriques $x = 1 + r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ et il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
T &= \int_C (x^2 - y^2) dx + 2xy dy \\
&= \int_0^{2\pi} \left\{ [(1 + r \cos \theta)^2 - r^2 \sin^2 \theta] (-\sin \theta) + 2(1 + r \cos \theta) r \sin \theta r \cos \theta \right\} d\theta \\
&= (r^3 - r) \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta = 0.
\end{aligned}$$

Problème 5.18 La famille de courbes $e^x \cos y = c$

SECTION 5.4

Problème 5.21 Dans les deux cas la fonction est holomorphe dans la région entre les deux courbes. Donc, la valeur de l'intégrale est zéro.

Problème 5.22 Il existe $r > 0$ si petit que le cercle C_r centré à l'origine de rayon r se retrouve complètement à l'intérieur de C . Donc,

$$J = \int_C \frac{dz}{z^2} = \int_{C_r} \frac{dz}{z^2}.$$

En coordonnées polaires

$$J = \int_0^{2\pi} i e^{-i\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} (\sin \theta + i \cos \theta) d\theta = 0.$$

Problème 5.25 0

11.6 Problèmes du Chapitre VI

SECTION 6.1

Problème 6.1 Si z_0 est à l'intérieur de C la valeur de l'intégrale est zéro (théorème de Cauchy) et, si z_0 est sur la courbe l'intégrale n'est pas définie. Pour le cas où $z_0 \in \text{int}(C)$ la formule de Cauchy nous donne

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{2z^2 - z - 2}{z - z_0} dz = 2z_0^2 - z_0 - 2.$$

En particulier, si $z_0 = 2$, $I = 8\pi i$.

Problème 6.2 Selon la formule de Cauchy,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{e^{kz}}{z} dz = 1$$

et vu que, sur le cercle, $z = e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$

$$\begin{aligned} \int_{|z|=1} \frac{e^{kz}}{z} dz &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\theta} e^{k(\cos \theta + i \sin \theta)} i e^{i\theta} d\theta \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{k \cos \theta} e^{ik \sin \theta} i d\theta \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{k \cos \theta} i (\cos(k \sin \theta) + i \sin(k \sin \theta)) d\theta \\ &= - \int_{-\pi}^{\pi} e^{k \cos \theta} \sin(k \sin \theta) d\theta + i \int_{-\pi}^{\pi} e^{k \cos \theta} \cos(k \sin \theta) d\theta \\ &= 2\pi i. \end{aligned}$$

Donc,

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{k \cos \theta} \cos(k \sin \theta) d\theta = 2\pi.$$

Mais, par le biais de la substitution $\phi = -\theta$ on voit que

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^0 e^{k \cos \theta} \cos(k \sin \theta) d\theta &= - \int_{\pi}^0 e^{k \cos(-\phi)} \cos(-k \sin \phi) d\phi \\ &= \int_0^{\pi} e^{k \cos \phi} \cos(k \sin \phi) d\phi \end{aligned}$$

et on finit par conclure que

$$\int_0^{\pi} e^{k \cos \theta} \cos(k \sin \theta) d\theta = \pi.$$

Problème 6.4

- A) $2\pi i e^{-\pi/2}$ B) $\pi i/4$ C) πi D) 0

Problème 6.5

- A) 0 B) 0

Problème 6.8

$$\begin{aligned} \int_C \frac{\sin^6 z}{(z - \frac{\pi}{6})^4} dz &= \frac{2\pi i}{3!} \frac{d^3}{dz^3} \sin^6 z \Big|_{z=\frac{\pi}{6}} \\ &= \frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{16} (75 - 9\sqrt{3}) \\ &= \frac{\pi i}{16} (25 - 3\sqrt{3}). \end{aligned}$$

SECTION 6.2

Problème 6.10

- A) La singularité la plus proche est $\pi/2$. Donc, le domaine est le voisinage $V(1+i, \rho)$ où ρ est la distance entre $1+i$ et $\pi/2$ à savoir $\rho = \sqrt{1 + (\frac{\pi}{2} - 1)^2}$.
- B) $V(1+i, 1)$.
- C) Le plan \mathbb{C} . (La fonction est entière.)

Problème 6.11

$$R_f(0) = 4\pi i \quad R_f(1) = 6\pi i \quad R_f(\infty) = -10\pi i$$

Problème 6.13 La fonction $f(z) = \frac{1}{\sin(1/z)}$ a des singularités (isolées) aux points $z = \frac{1}{k\pi}$ pour tout entier non-zéro k . Mais, $z = 0$ est une singularité non-isolée vu que tout voisinage de $z = 0$ contient une infinité des singularités $z = \frac{1}{k\pi}$.

SECTION 6.3

Problème 6.18 Soit C un cercle de rayon R centré à un point quelconque $z_0 \in \mathbb{C}$. Alors,

$$\begin{aligned} |f^{(n+1)}(z_0)| &= \left| \frac{(n+1)!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+2}} dz \right| \\ &\leq \frac{(n+1)!}{2\pi} \frac{M(|z|)^n}{|z-z_0|^{n+2}} \int_0^{2\pi} R d\theta \\ &\leq (n+1)! \frac{M(|z_0|+R)^n}{R^{n+1}} \end{aligned}$$

Mais R peut être arbitrairement grand (parce que f est une fonction entière) et il s'ensuit que $f^{(n+1)}(z) = 0 \forall z \in \mathbb{C}$. Donc, f est un polynôme de degré $\leq n$.

SECTION 6.4

Problème 6.20 Notons que

$$I = \int_C \frac{z^2 + z + 1}{z^2 - z + 2} dz = \int_C \left(1 + \frac{2z-1}{z^2 - z + 2} \right) dz = \int_C \frac{2z-1}{z^2 - z + 2} dz.$$

Les deux racines de l'équation $z^2 - z + 2 = 0$ sont $z = \frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{7}}{2}$ qui se retrouvent à l'intérieur du cercle défini par $|z-1| = 9$. Donc,

$$I = 2\pi i \left[R_f \left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{7}}{2} \right) + R_f \left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{7}}{2} \right) \right] = 4\pi i$$

Problème 6.22

- A) $6\pi i$ B) $2\pi i$ C) $6\pi i$ D) 0

SECTION 6.5

Problème 6.23 Posons $g(z) = ze^{a-z}$ et $\phi(z) = -1$. Il est clair que, sur le cercle, $|\phi(z)| = 1$ et pour g notons que

$$|ze^{a-z}| = e^a \left| e^{-\cos\theta - i\sin\theta} \right| = e^{a-\cos\theta} > 1$$

parce que $a > 1 \rightarrow a - \cos\theta > 0$. Selon le théorème de Rouché les deux fonctions $g(z)$ et $g(z) + \phi(z) = ze^{a-z} - 1$ ont le même nombre de zéros à l'intérieur de C et ce nombre est 1 vu que $g(z)$ n'a qu'un zéro ($z = 0$).

Problème 6.24 Choisissons $f(z) = 6z^3$ et $\phi(z) = z^7 - 2z^5 - z + 1$. Alors, sur le cercle unitaire,

$$|f(z)| = 6 \quad \text{et} \quad |\phi(z)| = |z^7 - 2z^5 - z + 1| \leq 1 + 2 + 1 + 1 = 5$$

et le théorème de Rouché implique que $f(z) = 6z^3$ et $f(z) + \phi(z) = z^7 - 2z^5 + 6z^3 - z + 1$ ont le même nombre de zéros à l'intérieur du cercle C . Ce nombre est évidemment trois.

Problème 6.25 Trois

Problème 6.26 Observons que si $|z| = 1$

$$\left| \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z} \right|^2 = \frac{(z - \alpha)(\bar{z} - \bar{\alpha})}{(1 - \bar{\alpha}z)(1 - \alpha\bar{z})} = \frac{1 + |\alpha|^2 - 2\Re(\alpha\bar{z})}{1 + |\alpha|^2 - 2\Re(\alpha\bar{z})} = 1.$$

Donc, si $|a| < 1$ et si l'on choisit $\phi(z) = -a$ le théorème de Rouché implique que f et

$$f + \phi = \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z} - a$$

ont le même nombre de racines à l'intérieur de C mais, vu que $|\alpha| < 1$ ce nombre est un.

Si $|a| > 1$ l'application du théorème de Rouché avec $f = -a$ et $\phi = (z - \alpha)/(1 - \bar{\alpha}z)$ montre que $f + \phi$ n'a aucune racine à l'intérieur de C parce que la fonction $f(z) = -a$ est identiquement constante et différente de zéro.

Problème 6.28 Montrer que toutes les racines de $z^5 + z + 1 = 0$ satisfont la condition $|z| < \frac{5}{4}$ et qu'il n'y a qu'une seule racine réelle laquelle se retrouve dans l'intervalle $(-1, 0)$. La règle de Descartes indique qu'il n'y a qu'une racine réelle et qu'elle est négative. Si $f(z) = z^5$ et $\phi(z) = z + 1$ on note que sur le cercle $|z| = \frac{5}{4}$, $|\phi| \leq 2.25$ et $|f| > 3.05$. Donc f et $f + \phi$ ont cinq zéros ont la valeur absolue est plus petite que $\frac{5}{4}$.

Finalement, on note que pour fonction réelle $f(x) = x^5 + x + 1$, $f(-1) = -1$ et la dérivée $f'(x) = 5x^4 + 1$ est toujours positive. Ceci montre que la racine réelle doit être > -1 et donc dans l'intervalle $(-1, 0)$.

Problème 6.30 $z = -1/2$ est le point fixe.

SECTION 6.6

Problème 6.31 $f(z) = e^z + ic$ ($c \in \mathbb{R}$)

Problème 6.32 Un contre-exemple est obtenu si $u(x, y) = x$ et $v(x, y) = -y$. Ces deux fonctions sont harmoniques dans \mathbb{C} mais la fonction complexe $f = u + iv = x - iy = \bar{z}$ n'est pas holomorphe dans \mathbb{C} . (En effet elle n'est dérivable nulle part!)

Problème 6.34 Notons que $|f|^2 + |g|^2 - f\bar{f} + g\bar{g}$ et

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}(f\bar{f} + g\bar{g}) = |f'|^2 + |g'|^2$$

et cette dernière quantité est zéro si et seulement si $|f'| = |g'| \equiv 0$ ce qui implique que f et g sont des fonctions constantes.

SECTION 6.7

Problème 6.41 Posons $g(x, y) = |\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y$. On note que

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -2 \cos x \sin x = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial y} = 2 \sinh y \cosh y = 0$$

dans Ω si et seulement si $x = y = 0$. Mais ce point n'est ni un maximum ni un minimum de $g(x, y)$ car $\frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = 0$ si $x = y = 0$. Donc, le maximum a lieu pour un point sur le cercle. Dans ce cas, posons $h(x) = \cos^2 x + \sinh^2 \sqrt{1 - x^2}$. Par les méthodes de calcul élémentaire on conclut que le maximum est atteint pour $x = 0$ avec $y = 1$. Ceci donne, pour la valeur maximum de $|\cos z|$, $\sqrt{1 + \sinh^2 1} = \cosh 1 = \frac{1}{2}(e + e^{-1})$.

11.7 Problèmes du Chapitre VII

SECTION 7.1

Problème 7.2 La fonction $f(z)$ a un pôle simple au point $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ qui est la seule singularité au dessus de l'axe réel. De plus, si C_R est le demi-cercle centré à l'origine et au dessus de l'axe des x et, si R est suffisamment grand,

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R} \frac{dz}{z^2 + z + 1} \right| &= \left| \int_{C_R} \frac{Re^{i\theta} d\theta}{R^2 e^{2i\theta} + Re^{i\theta} + 1} \right| \\ &\leq \int_0^\pi \frac{R d\theta}{R^2 - |Re^{i\theta} + 1|} \\ &\leq \frac{2\pi}{R} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Donc,

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + x + 1} = 2\pi i R_f \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} \right).$$

Mais,

$$R_f \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} \right) = \lim_{z \rightarrow -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}} \frac{z - \left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} \right)}{z^2 + z + 1} = \frac{1}{i\sqrt{3}}$$

et il s'ensuit que

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + x + 1} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

SECTION 7.2

Problème 7.5 Soient f la fonction $f(z) = \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)}$ et C le contour de la Figure 7.3. Alors, si $R > 2$

$$\int_C f(z) dz = \int_{-R}^R f(x) dx + \int_{C_R} f(z) dz = 2\pi i (R_f(i) + R_f(2i)).$$

Vu que $\lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) = 0 \Rightarrow \int_{C_r} f(z) dz = 0$ et il s'ensuit que

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} = 2\pi i (R_f(i) + R_f(2i)).$$

Or,

$$\begin{aligned} R_f(i) &= \left. \frac{z^2}{(z+i)(z^2+4)} \right|_{z=i} = \frac{i}{6} \\ R_f(2i) &= \left. \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)} \right|_{z=2i} = -\frac{i}{3} \\ 2\pi i (R_f(i) + R_f(2i)) &= \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

La fonction f est paire d'où $\int_{-\infty}^0 f(x) dx = \int_0^{\infty} f(x) dx$. Donc,

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} dx = \frac{\pi}{6}.$$

Problème 7.6 Utilisons le contour de la Figure 7.3 avec la fonction $f(z) = \frac{1}{z^4+1}$. Il est facile à montrer que $\int_{C_R} f(z) dz = 0$ et on observe que $z^4 + 1 = 0$ n'a aucune racine réelle et deux de ces quatre racines sont à l'intérieur de C à savoir

$$e^{i\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) \quad \text{et} \quad ie^{i\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i).$$

On trouve que

$$\begin{aligned} R_f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right) &= \frac{1}{4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right)^3} = \frac{-1-i}{4\sqrt{2}} \\ R_f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)\right) &= \frac{1}{4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)\right)^3} = \frac{1-i}{4\sqrt{2}} \\ 2\pi i\left(R_f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right) + R_f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)\right)\right) &= \frac{\pi\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Vu que la fonction $f(x)$ est paire,

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{x^4+1} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}.$$

Problème 7.7 Utilisons le contour de la Figure 7.3 avec la fonction $f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}$. Sur le demi-cercle C_R on note que

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R} \frac{e^{iz} dz}{(z^2+1)^2} \right| &\leq \int_0^\pi \left| \frac{e^{i(R\cos\theta+iR\sin\theta)} R i d\theta}{(R^2 e^{2i\theta} + 1)^2} \right| \\ &\leq \int_0^\pi \frac{e^{-R\sin\theta} R d\theta}{(R^2-1)^2} \\ &\leq \frac{\pi R}{(R^2-1)^2}. \end{aligned}$$

Donc, lorsque $R \rightarrow \infty$, $\int_{C_R} f(z) dz = 0$ et on déduit que

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ix}}{(x^2+1)^2} dx = \int_{-\infty}^\infty \frac{\cos x}{(x^2+1)^2} dx + i \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin x}{(x^2+1)^2} dx = 2\pi i R_f(i).$$

Mais,

$$\begin{aligned} R_f(i) &= \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} [(z-i)^2 f(z)] \\ &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \frac{e^{iz}}{(z+i)^2} \\ &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{(z+i)ie^{iz} - 2e^{iz}}{(z+i)^3} \\ &= -\frac{i}{2e}. \end{aligned}$$

Donc,

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ix}}{(x^2+1)^2} dx = \frac{\pi}{e}$$

et

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x dx}{(x^2 + 1)^2} = \frac{\pi}{e}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x dx}{(x^2 + 1)^2} = 0.$$

La fonction $\frac{\cos x dx}{(x^2 + 1)^2}$ est paire d'où

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x dx}{(x^2 + 1)^2} = \frac{\pi}{2e}.$$

Problème 7.9 La substitution $z = e^{i\theta}$ transforme l'intégrale comme suit

$$\begin{aligned} I = \int_0^{2\pi} \sin^{2n} \theta d\theta &= \int_C \left[\frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right) \right]^{2n} \frac{dz}{iz} \\ &= \int_C \frac{(z^2 - 1)^{2n}}{2^{2n} (-1)^n z^{2n+1}} dz \\ &= \int_C \frac{\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k} z^{2n-k}}{2^{2n} (-1)^n z^{2n+1}} \frac{dz}{i}. \end{aligned}$$

Rappelons que, pour une courbe C qui contient l'origine dans son intérieur, $\int_C z^m dz = 0$, $m \in \mathbb{Z}$ à moins que $m = -1$. Donc,

$$\begin{aligned} I = \int_0^{2\pi} \sin^{2n} \theta d\theta &= \int_C \frac{(-1)^n \binom{2n}{n}}{2^{2n} (-1)^n} \frac{dz}{iz} \\ &= \frac{1}{2^{2n} i} \binom{2n}{n} \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= \frac{2\pi (2n)!}{2^{2n} (n!)^2} = \frac{2\pi (2n)!}{(2^n n!)^2}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\int_0^{\pi} \sin^{2n} \theta d\theta = \frac{\pi (2n)!}{(2^n n!)^2}.$$

Problème 7.11 La substitution $z = e^{i\theta}$ nous donne

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta} &= \int_C \frac{4 dz}{iz [a^2 (z + \frac{1}{z})^2 - b^2 (z - \frac{1}{z})^2]} \\ &= \int_C \frac{4z dz}{i [a^2 (z^2 + 1)^2 - b^2 (z^2 - 1)^2]} \\ &= \int_C \frac{4z dz}{i [a(z^2 + 1) - b(z^2 - 1)] [a(z^2 + 1) + b(z^2 - 1)]} \\ &= \int_C \frac{4z dz}{i [(a-b)z^2 + (a+b)] [(a+b)z^2 + (a-b)]} \end{aligned}$$

Les deux équations quadratiques dans le dénominateur de la dernière intégrale admettent les quatre racines simples

$$\pm\sqrt{\frac{a+b}{b-a}} \quad \text{et} \quad \pm\sqrt{\frac{b-a}{a+b}}.$$

Or, seulement deux de ces racines sont à l'intérieur de C . Supposons que ces deux racines soient $\pm\sqrt{\frac{a+b}{b-a}}$. Alors, pour la fonction

$$f(z) = \frac{4z}{i[(a-b)z^2 + (a+b)][(a+b)z^2 + (a-b)]}$$

si $z_1 = \sqrt{\frac{a+b}{b-a}}$

$$\begin{aligned} R_f(z_1) &= \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{1}{i[a^2(z^2+1) - b^2(z^2-1)]} \\ &= \frac{1}{i} \cdot \frac{1}{a^2(\frac{a+b}{b-a} + 1) - b^2(\frac{a+b}{b-a} - 1)} \\ &= \frac{1}{i} \cdot \frac{b-a}{2a^2b - 2ab^2} \\ &= \frac{1}{2iab} \end{aligned}$$

Un calcul semblable montre que $R_f(-z_1) = \frac{1}{2iab}$ et il en résulte que

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta} = 2\pi i (R_f(z_1) + R_f(-z_1)) = \frac{2\pi}{ab}.$$

Il est laissé au lecteur de vérifier que si les deux racines qui sont à l'intérieur de C sont plutôt $\pm\sqrt{\frac{b-a}{a+b}}$ qu'on obtient exactement le même résultat.

Problème 7.14 Suggestion : Regarder la solution du Problème 7.9.

Problème 7.15 Utilisons le contour C de la Figure 7.3 et la fonction $f(z) = \frac{ze^{iaz}}{z^4+4}$. On observe que la fonction f a deux pôles simples à l'intérieur de C si $R > \sqrt{2}$ à savoir $z = 1+i$ et $z = -1+i$ et les résidus associés sont

$$\begin{aligned} R_f(1+i) &= \lim_{z \rightarrow 1+i} \frac{[z - (1+i)]ze^{iaz}}{z^4+4} \\ &= \frac{e^{iaz}}{4z^2} \Big|_{z=1+i} \\ &= \frac{e^{a(-1+i)}}{8i} \\ R_f(-1+i) &= \lim_{z \rightarrow -1+i} \frac{[z - (-1+i)]ze^{iaz}}{z^4+4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^{iaz}}{4z^2} \Big|_{z=-1+i} \\
&= -\frac{e^{-a(1+i)}}{8i}
\end{aligned}$$

Donc, pour R grand

$$\int_{-R}^R \frac{x e^{iax}}{x^4 + 4} dx + \int_{C_R} \frac{z e^{iaz}}{z^4 + 4} dz = 2\pi i [R_f(1+i) + R_f(-1+i)] = \frac{\pi i e^{-a}}{2} \sin a.$$

Mais, sur le demi-cercle C_R avec $R > \sqrt{2}$,

$$|zf(z)| = \left| \frac{R^2 e^{2i\theta} e^{iaR(\cos\theta + i\sin\theta)}}{R^2 e^{4i\theta} + 4} \right| \leq \frac{R^2}{R^4 - 4}$$

ce qui implique que $\lim_{R \rightarrow \infty} zf(z) = 0$ et, par conséquent, $\int_{C_R} f(z) dz = 0$ lorsque $R \rightarrow \infty$. Donc,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{iax}}{x^4 + 1} dx = \frac{\pi i}{2} e^{-a} \sin a \quad \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin ax}{x^4 + 1} dx = \frac{\pi}{2} e^{-a} \sin a$$

Problème 7.19 Pour le contour donné notons que $\int_C \frac{e^{az}}{\cosh z} dz = I_1 + I_2 - I_3 - I_4$ où

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{-R}^R \frac{e^{ax}}{\cosh x} dx & I_2 &= \int_0^1 \frac{e^{a(R+iy)}}{\cosh(R+iy)} i dy \\
I_3 &= \int_{-R}^R \frac{e^{a(x+i\pi)}}{\cosh(x+i\pi)} dx & I_4 &= \int_0^1 \frac{e^{a(R+iy)}}{\cosh(R+iy)} i dy
\end{aligned}$$

Le point $z = \frac{i\pi}{2}$ est la seule singularité de la fonction f à l'intérieur de C et son résidu y est

$$\begin{aligned}
R_f\left(\frac{i\pi}{2}\right) &= \lim_{z \rightarrow \frac{i\pi}{2}} \frac{(z - i\pi/2)e^{az}}{\cosh z} \\
&= \frac{e^{az}}{\sinh z} \Big|_{z=\frac{i\pi}{2}} \\
&= \sin \frac{\pi a}{2} - i \cos \frac{\pi a}{2}.
\end{aligned}$$

Sur le segment $\overline{(R, 0), (R, \pi)}$

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^1 \frac{e^{a(R+iy)}}{\cosh(R+iy)} i dy \right| &\leq e^{aR} \int_0^1 \frac{dy}{|\cosh(R+iy)|} \\
&\leq \frac{e^{aR}}{\sinh R} \\
&= \frac{1}{e^{(1-a)R} [1 - e^{-2R}]}
\end{aligned}$$

qui tend vers zéro lorsque $R \rightarrow \infty$. Donc,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{e^{a(R+iy)}}{\cosh(R+iy)} i dy = 0.$$

De manière semblable

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{e^{a(-R+iy)}}{\cosh(-R+iy)} i dy = 0.$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} \int_C \frac{e^{az}}{\cosh z} dz &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{\cosh x} dx - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{a(x+i\pi)}}{\cosh(x+i\pi)} dx \\ &= (1 + e^{ia\pi}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{\cosh x} dx \\ &= 2\pi e^{\frac{ia\pi}{2}}. \end{aligned}$$

Donc,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{\cosh x} dx = 2\pi \frac{e^{\frac{ia\pi}{2}}}{1 + e^{ia\pi}} = \frac{\pi}{\cos \frac{\pi a}{2}}$$

Or, observons que si $x = -u$

$$\int_{-\infty}^0 \frac{e^{ax}}{\cosh x} dx = \int_0^{\infty} \frac{e^{-au}}{\cosh u} du = \int_0^{\infty} \frac{e^{-ax}}{\cosh x} dx.$$

Donc,

$$2 \int_0^{\infty} \frac{\cosh ax}{\cosh x} dx = \pi \sec \frac{\pi a}{2}$$

et le résultat recherché est une conséquence immédiate.

SECTION 7.3

Problème 7.21 Ici on intègre la fonction $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2}$ sur le contour de la Figure 7.3. Il est facilement démontrer que sur le demi-cercle C_R , $\int_{C_R} \frac{dz}{(z^2+1)^n} = 0$ et on trouve qu'en passant à la limite

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^n} = 2\pi i R_f(i).$$

Or,

$$\begin{aligned} R_f(i) &= \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow i} \left(\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \frac{(z-i)^n}{(z^2+1)^n} \right) \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (z+i)^{-n} \Big|_{z=i} \end{aligned}$$

Par récurrence on peut établir la formule

$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \frac{1}{(z+i)^n} = \frac{(-1)^{n-1} n(n+1) \cdots (2n-2)}{(z+i)^{2n-1}} = \frac{(-1)^{n-1} (2n-2)!}{(n-1)! (z+i)^{2n-1}}$$

Alors,

$$\begin{aligned} R_f(i) &= \frac{1}{(n-1)!} \cdot \frac{(-1)^n (2n-2)!}{(n-1)! (z+i)^{2n-1}} \Big|_{z=i} \\ &= \frac{(-1)^{n-1} (2n-2)!}{[(n-1)!]^2 (2i)^{2n-1}} \\ &= \frac{(2n-2)!}{2^{2n-1} [(n-1)!]^2 i} \end{aligned}$$

et, finalement,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^n} = 2\pi i R_f(i) = \frac{\pi (2n-2)!}{2^{2n-2} [(n-1)!]^2}.$$

Problème 7.22 Si l'on effectue la substitution $x = u^2$ dans la formule

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x} dx \quad (0 < a < 1)$$

on obtient

$$\int_0^{\infty} \frac{2u^{2a-1}}{1+u^2} du = \frac{\pi}{2 \sin a\pi}$$

et, si $b = 2a$ on obtient

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{b-1}}{1+x^2} = \frac{\pi}{2 \sin \frac{b\pi}{2}} \quad (0 < b < 2).$$

Dérivons cette expression deux fois par rapport à b

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial b} \int_0^{\infty} \frac{x^{b-1}}{1+x^2} &= \int_0^{\infty} \frac{x^{b-1} \log x}{1+x^2} \\ &= -\frac{\pi \cos \frac{\pi a}{2}}{4 \sin^2 \frac{\pi a}{2}} \\ \frac{\partial^2}{\partial b^2} \int_0^{\infty} \frac{x^{b-1}}{1+x^2} &= \frac{x^{b-1} \log^2 x}{1+x^2} \\ &= \frac{\pi^2 (\sin^2 \frac{\pi b}{2} + 2 \cos^2 \frac{\pi b}{2})}{8 \sin^2 \frac{\pi b}{2}} \end{aligned}$$

Si $b = 1$ la première expression nous donne

$$\int_0^{\infty} \frac{\log x}{1+x^2} dx = 0$$

et la deuxième génère la formule

$$\int_0^{\infty} \frac{\log^2 x}{1+x^2} = \frac{\pi^3}{8}.$$

Problème 7.24 On intègre $f(z) = \frac{z}{\sinh z}$ sur le contour $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4 \cup C_5$ où

- C_1 : $|z| = r$ entre $(0, r)$ et $(r, 0)$
- C_2 : l'axe des x entre $(r, 0)$ et $(R, 0)$
- C_3 : la droite $x = R$ entre $(R, 0)$ et (R, π)
- C_4 : la droite $y = \pi$ entre (R, π) et (r, π)
- C_5 : $|z - 1| = r$ entre (r, π) et $(0, \pi - r)$

La valeur de $\int_{C_1} \frac{z}{\sinh z} dz \rightarrow 0$ par une application du Lemme 7.1.2 (car $K = \lim_{r \rightarrow 0} z f(z) = 0$).
La valeur de $\int_{C_5} \frac{z}{\sinh z} dz \rightarrow -\pi^2/2$ par une autre application du Lemme 7.1.2 (cette fois $K = \lim_{z \rightarrow i\pi} (z - i\pi) f(z) = -i\pi$). Donc, en passant à la limite lorsque $r \rightarrow 0$ et $R \rightarrow \infty$

$$\int_C \frac{z}{\sinh z} dz = \int_0^{\infty} \frac{x}{\sinh x} dx - \int_0^{\infty} \frac{x + i\pi}{\sinh(x + i\pi)} dx - \frac{\pi^2}{2} = 0$$

d'où

$$2 \int_0^{\infty} \frac{x}{\sinh x} dx + i\pi \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sinh x} = \frac{\pi^2}{2}$$

ce qui nous donne

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{\sinh x} dx = \frac{\pi^2}{4}.$$

SECTION 7.5

Problème 7.30 On fait la substitution $x = \sqrt{2}y$ pour obtenir

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} y^2 e^{-2y^2} dy &= \int_0^{\infty} \frac{x^2}{2\sqrt{2}} e^{-x^2} dx = \frac{1}{4\sqrt{2}} \left[2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} x^{2(\frac{3}{2})-1} dx \right] \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{16} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2\pi}}{16}. \end{aligned}$$

11.8 Problèmes du Chapitre VIII

SECTION 8.1

Problème 8.1 Supposons que $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = L_1$ et $\sum_{n=0}^{\infty} y_n = L_2$. Alors, si a_n et b_n sont les sommes partielles de ses séries il existe des entiers non-négatifs N_1 et N_2 tels que pour toute valeur $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned} n > N_1 &\Rightarrow |a_n - L_1| < \frac{1}{2}\epsilon \\ n > N_2 &\Rightarrow |b_n - L_2| < \frac{1}{2}\epsilon. \end{aligned}$$

Si $n \geq \max\{N_1, N_2\}$ alors

$$|(a_n + ib_n) - (L_1 + iL_2)| \leq |a_n - L_1| + |b_n - L_2| < \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon = \epsilon$$

et il s'ensuit que $\sum_{n=0}^{\infty} x_n + iy_n = L_1 + iL_2$.

Réciproquement, si $\sum_{n=0}^{\infty} x_n + iy_n = L_1 + iL_2$, $\forall \epsilon$ il correspond un entier non-négatif N tel que

$$n > N \Rightarrow |(a_n + ib_n) - (L_1 + iL_2)| < \epsilon.$$

Mais, pour cette même valeur de ϵ et $n > N$

$$\begin{aligned} |a_n - L_1| &\leq |(a_n - L_1) + i(b_n - L_2)| < \epsilon \\ |b_n - L_2| &\leq |(a_n - L_1) + i(b_n - L_2)| < \epsilon \end{aligned}$$

ce qui impliquent, respectivement, que $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = L_1$ et $\sum_{n=0}^{\infty} y_n = L_2$.

Problème 8.2 Les conditions du problème nous force de conclure que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $a_n = a_0 + nk$. Donc, à moins que $a_0 = k = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$. Donc, la série ne peut être convergente.

Problème 8.3 Si $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ alors, si $n > m$

$$|H_n - H_m| = \left| \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \dots + \frac{1}{n} \right| \geq \frac{n-m}{m+1}.$$

Peu importe la valeur de N il est toujours possible de déterminer $m > N$ et $n > N$ tels que la quantité $\left| \frac{n-m}{m+1} \right|$ soit arbitrairement grande. Donc, selon le Théorème 8.1.1 la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

SECTION 8.2

Problème 8.6 La série diverge par le test de comparaison. Il suffit de choisir $a_n = \frac{n}{1+n^2}$ et $b_n = \frac{1}{n}$ et on voit que $\frac{n}{1+n^2} < \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$. Mais, on sait que la série harmonique $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

Problème 8.7 La convergence est assurée par l'application du test de comparaison avec $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$.

Problème 8.8 On applique le test de condensation pour obtenir la série auxiliaire

$$\sum_{n=2}^{\infty} 2^k \frac{\log(2^k + 1)}{2^k \log 2} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log(2^k + 1)}{k \log 2}.$$

Cette série est divergente parce que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log(2^k + 1)}{k \log 2} > \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log 2^k}{k \log 2} = 1 > 0.$$

Problème 8.11 La suite $\{s_n\}$ des somme partielles possède deux points d'accumulation distincts à savoir $\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{2}$ donc elle n'a pas de limite. Il s'ensuit que la série infinie associée ne converge pas.

Problème 8.12 Si $a_n = \frac{3.6.9 \dots (3n)}{1.3.5 \dots (2n-1)}$ alors $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{3(n+1)} = \frac{3(n+1)}{2(n+1)-1} > \frac{3}{2} > 1$ et la série diverge par le test d'Alembert.

Problème 8.15 Observons que $\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{2n} + \frac{1}{n} \left(\frac{-1}{2n+1} \right)$. Donc, la série est divergente par le test de Raabé. ($\beta = -\frac{1}{2}$, $\epsilon = -\frac{1}{2n+1} \cdot$)

Problème 8.17 Absolument convergente.

Problème 8.18 Convergente mais non absolument convergente.

Problème 8.19 Absolument convergente.

Problème 8.22 Le fait que la suite $\{\gamma_n\}$ est bornée implique qu'il existe $K > 0$ tel que $\forall n, |\gamma_n| \leq K$. La comparaison de la série $\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n c_n$ avec $\sum_{n=0}^{\infty} K c_n$ qui converge vers K fois la somme de la série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ donne le résultat recherché.

SECTION 8.3

Problème 8.25 Le rayon de convergence de la série donnée est $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$ où, possiblement, $R = \infty$. Pour la série $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$ est

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n a_n}{(n+1) a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = R \cdot 1 = R$$

ce qui reste vrai même si $R = \infty$.

Problème 8.27 Le rayon de convergence de la série est

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)(n+2)}{n(n+1)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n} \right) = 1.$$

Donc, le cercle de convergence est défini par $|z| = 1$. Pour les points de ce cercle la série des valeurs absolues est $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ qui converge. (Test de comparaison avec $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.)

Problème 8.29 Rappelons que si $|z| < 1$, $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$. Prenons la dérivée des deux côtés pour trouver que

$$\frac{d}{dz} \frac{1}{1-z} = \frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1}.$$

En multipliant les membres de cette expression par z on obtient

$$\frac{z}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^n.$$

(Voir le Problème 8.27 pour la question de la convergence de cette série.)

Problème 8.30 Si $w = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $w' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ et on trouve que

$$\begin{aligned} \sum n = 1^{\infty} n a_n z^{n-1} &= 1 + \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right)^2 \\ a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \dots &= 1 + (a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots)^2 \end{aligned}$$

d'où l'on tire les identités

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 + a_0^2 \\ 2a_2 &= 2a_0 a_1 \\ 3a_3 &= 2a_0 a_2 + a_1^2 \\ 4a_4 &= 2a_0 a_3 + 2a_1 a_2 \\ 5a_5 &= 2a_0 a_4 + 2a_1 a_3 + 2a_2^2 \end{aligned}$$

La condition initial $w(0) = 0 \Rightarrow a_0 = 0$ et on trouve que

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = \frac{1}{3}, \quad a_4 = 0, \quad a_5 = \frac{2}{15}.$$

Donc,

$$\tan z = z + \frac{z^3}{3} + \frac{2z^5}{15} \dots$$

SECTION 8.4

Problème 8.38 Il est clair que si $f(z) = e^{z^2} \int_0^z e^{-\xi^2} d\xi$ alors $f(0) = 0$ et

$$f'(z) = e^{z^2} e^{-z^2} + 2ze^{z^2} \int_0^z e^{-\xi^2} d\xi = 1 + 2zf(z).$$

Posons $w = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ comme solution possible de l'équation différentielle $w' = 1 + 2zw$ qui doit satisfaire la condition initiale $w(0) = 0$. Alors,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} &\equiv 1 + \sum_{n=0}^{\infty} 2 a_n z^{n+1} \\ a_+ \sum_{n=0}^{\infty} (n+2) a_{n+2} z^{n+1} &\equiv 1 + \sum_{n=0}^{\infty} 2 a_n z^{n+1}. \end{aligned}$$

Donc,

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1, a_{n+2} = \frac{2a_n}{n+2}$$

et

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{2}{3} a_1 \\ a_5 &= \frac{2}{5} a_3 = \frac{2^2}{3 \cdot 5} a_1 \\ a_7 &= \frac{2}{7} a_5 = \frac{2^3}{3 \cdot 5 \cdot 7} a_1 \\ \dots &\dots \dots \dots \dots \\ a_{2n+1} &= \frac{2^n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)} a_1 \\ &= \frac{2^n \cdot 2 \cdot 4 \cdots (2n)}{(2n+1)!} a_1 \\ &= \frac{2^{2n} n!}{(2n+1)!} a_1 \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$f(z) = e^{z^2} \int_0^z e^{-\xi^2} d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n} n!}{(2n+1)!} z^{2n+1}.$$

Problème 8.41 Écrivons

$$\frac{1}{z^2 - 5z + 6} = \frac{1}{(z-2)(z-3)} = \frac{-1}{z-2} + \frac{1}{z-3}$$

Or,

$$\begin{aligned} \frac{-1}{z-2} + \frac{1}{z-3} &= \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{z}{2}} - \frac{1}{3} \frac{1}{1 - \frac{z}{3}} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n - \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}} \right] z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+1} - 2^{n+1}}{2^{n+1}3^{n+1}} z^n
\end{aligned}$$

Cette série est absolument convergente pour tout z avec $|z| < 2$. Ceci suit du fait que 2 est le minimum des rayons de convergence des deux expressions pour $\frac{1}{z-2}$ et $\frac{1}{z-3}$. Mais on peut aussi déduire ce fait en notant que

$$\frac{(3^{n+1} - 2^{n+1})3^{n+2}2^{n+2}}{2^{n+1}3^{n+1}(3^{n+2} - 2^{n+2})} = \frac{6(3^{n+1} - 2^{n+1})}{3^{n+2} - 2^{n+2}} = \frac{6 \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)}{3 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n+2}} \rightarrow 2.$$

Problème 8.43 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{a^{n+1}}$. Le rayon de convergence est $R = a$.

Problème 8.45

- A) $2\pi - 1$ B) $+\infty$ C) 1 D) $\frac{\pi}{2}$

