

Chapitre 7

ÉVALUATION DES INTÉGRALES PAR LA THÉORIE DES RÉSIDUS

7.1 QUELQUES LEMMES.

Dans cette première section nous allons démontrer quelques lemmes qui seront utiles pour l'évaluation de certains types de limites lesquelles se présenteront en conjonction avec l'évaluation des intégrales définies.

Lemme 7.1.1 Soit \widehat{AB} l'arc du cercle $|z| = R$ pour lequel $R > 0$, $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$, ($\theta_1 < \theta_2$). Supposons que $\lim_{R \rightarrow \infty} z f(z) = K \in \mathbb{C}$ où la convergence est uniforme et que f soit holomorphe dans la région comprise entre $\theta = \theta_1$ et $\theta = \theta_2$ pour $|z|$ suffisamment grand. Alors,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\widehat{AB}} f(z) dz = i(\theta_2 - \theta_1) K.$$

Démonstration

Posons $z f(z) = K + \lambda(z)$. Soit $\epsilon > 0$ donné et choisissons R assez grand pour que $|\lambda(z)| < \epsilon/|\theta_2 - \theta_1|$. Alors,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\widehat{AB}} f(z) dz - i(\theta_2 - \theta_1) K \right| &= \left| \int_{\widehat{AB}} \left[\frac{K + \lambda(z)}{z} \right] dz - i(\theta_2 - \theta_1) K \right| = \\ \left| \int_{\widehat{AB}} (K + \lambda(z)) i d\theta - i(\theta_2 - \theta_1) K \right| &= \left| \int_{\widehat{AB}} \lambda i d\theta \right| < \frac{\epsilon}{|\theta_2 - \theta_1|} \left| \int_{\widehat{AB}} d\theta \right| = \epsilon. \end{aligned}$$

C.Q.F.D. ■

Exemple 7.1.1 Si $f = \phi/\psi$ où $\phi(z) = \sum_0^{n-1} b_k z^k$ avec $b_{n-1} \neq 0$ et $\psi(z) = \sum_0^n a_k z^k$ avec $a_n \neq 0$ alors

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\widehat{AB}} f(z) dz = \frac{b_{n-1}}{a_n} (\theta_2 - \theta_1).$$

Fin de l'exemple.

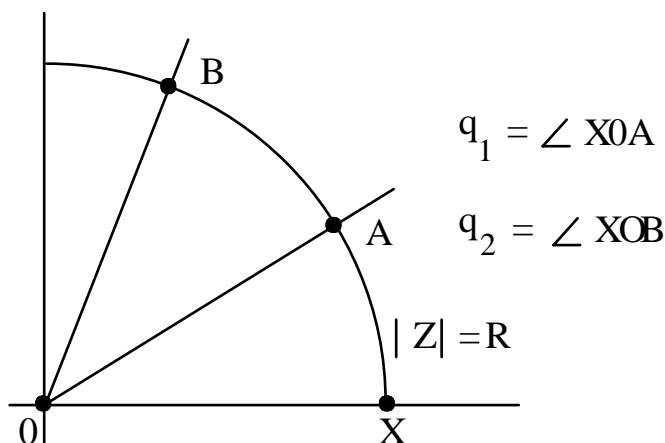


Figure 7.1:

Exemple 7.1.2 Soit $f = \phi/\psi$ où $\phi(z) = \sum_0^k b_j z^j$ avec $b_k \neq 0$ et $\psi(z) = \sum_0^n a_j z^j$ avec $a_n \neq 0$ et $0 \leq k \leq n - 2$. Il est clair que $\lim_{R \rightarrow \infty} z f(z) = 0$. Soit Γ le contour fermé simple construit en réunissant la partie de l'axe des x entre $-R$ et R ($R > 0$) et la section du cercle $C_R : z = R e^{i\theta}$ pour laquelle $0 \leq \theta \leq \pi$. Alors, si $\psi(z)$ n'a pas de zéro réel, on voit que pour $R > 0$ quelconque

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{-R}^R \frac{\phi(x)}{\psi(x)} dx + \int_{C_R} f(z) dz = 2\pi i \sum R_f(z_{\alpha})$$

où cette somme représente celle des résidus de f pour les pôles de f contenus à l'intérieur de Γ . (On suppose implicitement que f n'a pas de singularité sur C_R . Vu que ceci ne peut arriver que pour un nombre fini de valeurs de R , il suffit de prendre la valeur initiale de R suffisamment grand. Or, lorsque $R \rightarrow \infty$, on trouve que

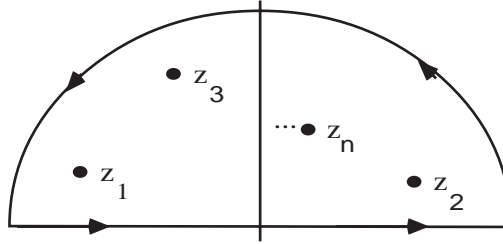
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\phi(x)}{\psi(x)} dz = 2\pi i \sum R_f(z_{\alpha})$$

où la somme représente celle de tous les résidus de f au dessus de l'axe des x .

Fin de l'exemple.

Il y a une faiblesse dans l'argumentation de l'exemple précédant laquelle réside dans notre acceptation implicite de la formule

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\phi(x)}{\psi(x)} dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{\phi(x)}{\psi(x)} dz.$$



Les points indiqués sont
tous les zéros de $\psi(z)$.

Figure 7.2:

Dans le cas présenté dans l'exemple ceci est vrai mais, en général, il faut se rappeler que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\substack{\eta \rightarrow +\infty \\ \zeta \rightarrow -\infty}} \int_{\zeta}^{\eta} f(x) dx$$

où η et ζ sont indépendantes et il se peut que cette limite n'existe pas même si le type de limite symétrique utilisé dans l'exemple converge.

Néanmoins l'exemple nous montre comment on peut utiliser la théorie des résidus pour l'évaluation de certaines intégrales réelles. On verra des exemples détaillés dans la prochaine section.

Lemme 7.1.2 *Soit f une fonction holomorphe dans un voisinage pointé de $z = a$. Supposons que $(z - a)f(z)$ converge uniformément vers $K \in \mathbb{C}$ lorsque $z \rightarrow a$. Si \widehat{AB} est l'arc du cercle $|z - a| = r$ pour lequel $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ où $\theta = \arg(z - a)$, ($\theta_1 < \theta_2$), alors*

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\widehat{AB}} f(z) dz = i(\theta_2 - \theta_1) K$$

La démonstration est semblable à celle du Lemme VII.1.1.

Lemme 7.1.3 *Supposons que $\theta \in (0, \pi/2]$. Alors,*

$$1 \leq \frac{\theta}{\sin \theta} \leq \frac{\pi}{2}.$$

Démonstration

Si $\theta \in (0, \pi/2)$ alors $\sec^2 \theta > 1$. Donc, $f(\theta) = \tan \theta - \theta$ est strictement croissante sur $[0, \pi/2]$ et elle est toujours positive. Sur l'intervalle $(0, \pi/2)$ on trouve que

$$\frac{d}{d\theta} \left(\frac{\theta}{\sin \theta} \right) = \frac{\sin \theta - \theta \cos \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} (\tan \theta - \theta) > 0.$$

Donc, $g(\theta) = \theta/\sin \theta$ est strictement croissante sur $(0, \pi/2)$ d'où l'inégalité du lemme suit.

Fin de l'exemple.

Lemme 7.1.4 (Jordan) *Si $R > 0$ alors*

$$\int_0^{\pi/2} e^{-R \sin \theta} d\theta < \frac{\pi}{2R}.$$

Démonstration

Par le Lemme 7.1.3 on voit que

$$e^{-R \sin \theta} \leq e^{-2R\theta/\pi}.$$

d'où

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{\pi/2} e^{-R \sin \theta} d\theta \right| &\leq \int_0^{\pi/2} |e^{-R \sin \theta}| d\theta \\ &\leq \int_0^{\pi/2} e^{-2R\theta/\pi} d\theta \\ &= -\frac{\pi}{2R} e^{-2R\theta/\pi} \Big|_0^{\pi/2} \\ &= \frac{\pi}{2R} (1 - e^{-R}) < \frac{\pi}{2R}. \end{aligned}$$

C.Q.F.D. ■

La démonstration du lemme suivant est laissée en exercice.

Lemme 7.1.5 *Si la fonction f est intégrable dans les intervalles indiqués*

$$\int_0^\pi f(\sin \theta) d\theta = 2 \int_0^{\pi/2} f(\sin \theta) d\theta.$$

7.2 QUELQUES EXEMPLES.

Pour notre premier exemple, essayons de trouver la valeur de l'intégrale élémentaire

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

(Le lecteur devrait savoir évaluer cette intégrale sans utiliser la théorie des résidus!)

La fonction réelle $f(x) = 1/(1+x^2)$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ mais son extension naturelle, $f(z) = 1/(1+z^2)$, a deux pôles dans \mathbb{C} ($z = i$ et $z = -i$). Dans ce cas et dans celui d'une fonction rationnelle générale $P(z)/Q(z)$ qui n'a aucun pôle sur l'axe réel, on construit un contour Γ comme

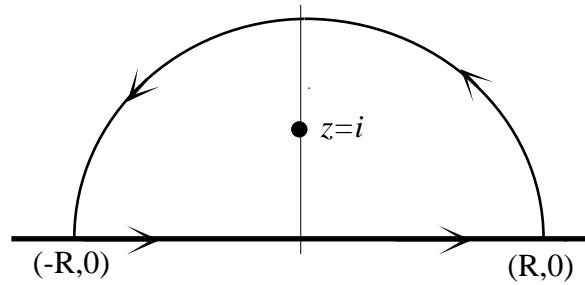


Figure 7.3:

suit. Soit $[-R, R]$, $R > 0$, un segment de l'axe réel et C_R la partie du cercle de rayon R centré à l'origine, laquelle se trouve au-dessus de l'axe réel. (Voir la Figure 7.3.)

Soit $\Gamma = [-R, R] \cup C_R$ (orientation positive). Si $R > 1$ alors Γ contient $z = i$ à son intérieur. (Dans le cas de $P(z)/Q(z)$ on peut choisir R si grand que tous les zéros de Q au-dessus de l'axe des x se retrouvent à l'intérieur de Γ .) Or, il s'ensuit que

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{1+z^2} = 2\pi i R_f(i)$$

Comme le pôle $z = i$ est simple, $R_f(i) = \lim_{z \rightarrow i} (z - i)(z^2 + 1)^{-1} = -i/2$.

Maintenant on décompose l'intégrale en deux parties.

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{1+z^2} = \int_{-R}^R \frac{dx}{1+x^2} + \int_{C_R} \frac{dz}{1+z^2}$$

En appliquant le Lemme 7.1.1 on voit que $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{dz}{1+z^2} = 0$ de sorte que l'intégrale évaluée sur C_R tend vers zéro lorsque $R \rightarrow \infty$. Donc,

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{1+z^2} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{dx}{1+x^2} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2\pi i \left(\frac{1}{2i} \right) = \pi$$

d'où il suit que

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$$

En général, si Q n'a pas de zéro sur l'axe réel et si $\text{degré}(Q) - \text{degré}(P) \geq 2$ alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum R_f(z_{\alpha})$$

où $\sum R_f(z_{\alpha})$ est la somme des résidus de $f = P/Q$ au-dessus de l'axe réel. Le lecteur pourra établir, par exemple, que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{a+x^2} = \frac{\pi}{\sqrt{a}}, \quad (a > 0) \quad , \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{2+x^2} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \text{ etc.}$$

Le prochain type d'intégrale qu'on considère est de la forme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \sin \alpha x \, dx \quad \text{ou} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \cos \alpha x \, dx \quad (7.1)$$

où $\alpha > 0$ et où P, Q sont des polynômes tels que Q n'a aucun zéro sur l'axe réel et $\text{degré}(Q) - \text{degré}(P) \geq 2$.

Si on examine la fonction complexe f définie par $f(z) = e^{i\alpha z} P(z)/Q(z)$ on voit que, lorsque $z = x + 0i$

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \cos \alpha x + i \frac{P(x)}{Q(x)} \sin \alpha x .$$

Donc, si on peut évaluer $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\alpha x} \, dx$ on obtiendra les valeurs des deux intégrales 7.1 en prenant des parties réelles et imaginaires respectivement.

Nous allons utiliser le même contour que dans le premier exemple. On note que $|f(z) e^{i\alpha z}| = |f(z)| e^{-\alpha y} \leq |f(z)|$. Mais, lorsque $R \rightarrow \infty$, on sait que $|f(z)| \rightarrow 0$. Donc, par le Lemme 7.1.1

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z} \, dz = 0 .$$

Et, comme conséquence

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x} \, dx = 2\pi i \sum R_f(z_\alpha) \quad (7.2)$$

où encore la somme est celle de tous les résidus de f au dessus de l'axe réel.

Exemple 7.2.1 *Que se passera-t-il si le contour de la Figure 7.3 est remplacé par celui de la Figure 7.4 dans le raisonnement qui mène à (7.2).*

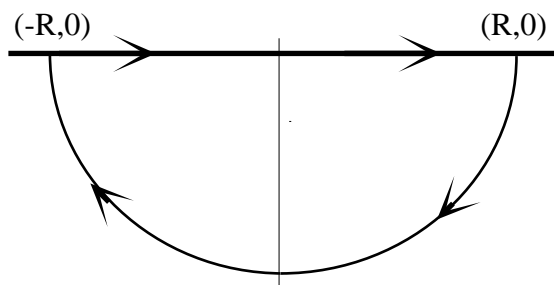


Figure 7.4:

Solution

Notons d'abord que l'intégration se fait sur un contour d'orientation négative de telle sorte que si Γ est le contour (orientation positive)

$$\int_{\Gamma^-} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = \int_{-R}^R \frac{P(x)}{Q(x)} dx + \int_{C_R^-} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = -2\pi i \Sigma R(z_\beta)$$

où on a supposé que R est si grand que le contour Γ contient toutes les racines z_β de $Q(z) = 0$. qui se retrouvent au-dessous de l'axe réel. Il en résulte que, lorsqu'on passe à la limite

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = -2\pi i \Sigma R(z_\beta).$$

Mais, le résidu de $P(z)/Q(z)$ au point ∞ est zéro de telle sorte que $\Sigma R(z_\beta) = -\Sigma R(z_\alpha)$ où, bien sûr, les z_α sont les zéros de Q au dessus de l'axe réel.

Exemple 7.2.2 *Évaluer*

$$(a) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{a^2 + x^2} dx \quad (a > 0) \quad , \quad (b) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{a^2 + x^2} dx \quad (a > 0).$$

Solution

Ici on prend $f(z) = e^{i\alpha z}/(a^2 + z^2)$. On sait alors que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{a^2 + x^2} dx = 2\pi i \sum R_f(z_\alpha)$$

où la somme représente celle des résidus de f au dessus de l'axe réel. Le seul pôle se trouvant à l'intérieur de notre contour est celui au point $z = ai$. On voit que

$$R_f(ai) = \lim_{z \rightarrow ai} (z - ai) \frac{e^{i\alpha z}}{a^2 + z^2} = \frac{1}{2ia} e^{-a\alpha}.$$

Donc,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{a^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{a} e^{-a\alpha}$$

d'où

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{a^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{a} e^{-a\alpha} \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{a^2 + x^2} dx = 0.$$

Bien sûr, on aurait pu déduire la valeur de l'intégrale (b) au départ vu que la fonction est impaire.

Fin de l'exemple.

Dans le cas d'une intégrale ayant une des formes (7.1) mais pour laquelle Q possède des zéros sur l'axe réel, il faut modifier notre approche. On en donnera une illustration avec l'exemple suivant.

Exemple 7.2.3 Évaluer

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx .$$

Solution

Ici la fonction rationnelle $1/z$ a un pôle au point 0. Donc le contour utilisé dans les exemples précédents ne peut être employé dans ce cas. Afin d'éliminer le problème à l'origine on construit un petit cercle $|z| = r$, $r > 0$ et on prendre comme C_r la partie de ce cercle qui est au dessus de l'axe des x . Le contour Γ consiste des segments $[-R, -r]$, $[r, R]$, C_r et C_R qui est la partie supérieure du cercle $|z| = R$. (Voir la Figure 7.5.)

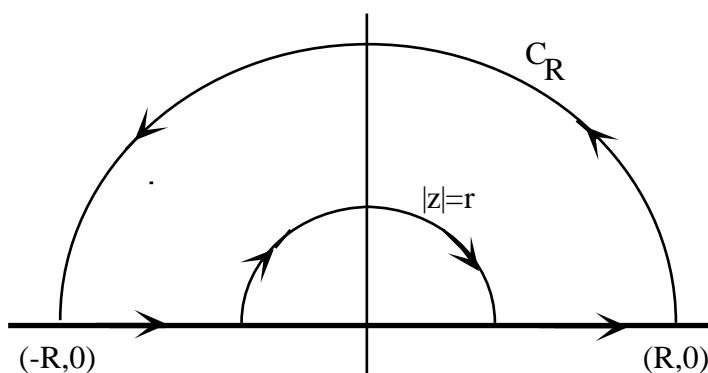


Figure 7.5:

Posons $f(z) = e^{iz}/z$. Alors,

$$I = \int_{\Gamma} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0 .$$

Mais, $I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$ où

$$I_1 = \int_r^R \frac{e^{ix}}{z} dx \quad , \quad I_2 = \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz ,$$

$$I_3 = \int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{z} dx \quad , \quad I_4 = \int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z} dz .$$

Or, observons que $\lim_{r \rightarrow 0} z (e^{iz}/z) = 1$. Donc, par le Lemme 7.1.2,

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} I_4 = i[0 - \pi] = -i\pi .$$

Pour l'intégrale I_2 on voit que

$$I_2 = \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_0^{\pi} e^{iR \cos \theta - R \sin \theta} d\theta .$$

Donc,

$$|I_2| \leq \int_0^\pi e^{-R \sin \theta} d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \sin \theta} d\theta.$$

Cependant, $R \sin \theta \geq 2R\theta/\pi$ ce qui implique que $e^{-2R \sin \theta} \leq e^{-2R\theta/\pi}$ et alors

$$|I_2| \leq 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2R\theta}{\pi}} d\theta = \frac{\pi}{R} (1 - e^{-R})$$

On voit maintenant que $\lim_{R \rightarrow \infty} I_2 = 0$. Or,

$$I = \int_r^R \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx - i\pi - \phi(r, R) = 0$$

où $\phi(r, R) \rightarrow 0$ lorsque $r \rightarrow 0$ et $R \rightarrow \infty$. Donc,

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Fin de l'exemple.

Exemple 7.2.4 Prouver que si $0 < a < 1$ alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1 + e^x} dx = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

Solution

La difficulté d'un problème comme celui-ci est de trouver un contour approprié. Il est évident qu'on considère la fonction complexe $f(z) = e^{az}/(1 + e^z)$. Notons que les contours utilisés jusqu'ici ne semblent pas appropriés car f a une infinité de pôles sur l'axe des y . Mais nous pouvons contourner ce problème en utilisant comme contour le rectangle défini par les points $(-R, 0)$, $(R, 0)$, $(R, 2\pi)$ et $(-R, 2\pi)$ (Voir la Figure 7.6.)

Ce contour ne contient qu'un seul pôle de f et on trouve que

$$\int_{\Gamma} \frac{e^{az}}{1 + e^z} dz = 2\pi i R_f(\pi i) = -2\pi i e^{a\pi i}.$$

Si $z = R + iy$ alors $|f(z)| \leq e^{aR}/(e^R - 1) \rightarrow 0$ lorsque $R \rightarrow \infty$ d'où

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \frac{e^{a(R+iy)}}{1 + e^{R+iy}} i dy = 0.$$

De façon semblable,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{2\pi}^0 \frac{e^{a(-R+iy)}}{1 + e^{-R+iy}} i dy = 0.$$

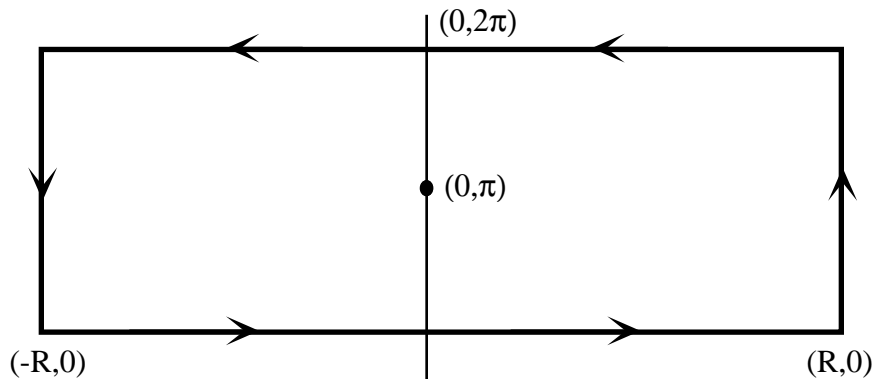


Figure 7.6:

Il s'ensuit que

$$I = \int_{\Gamma} \frac{e^{az}}{1+e^z} dz = \int_{-R}^R \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx - \int_{-R}^R \frac{e^{a(x+2\pi i)}}{1+e^{x+2\pi i}} dx + \phi(R) = -2\pi i e^{a\pi i}$$

où $\lim_{R \rightarrow \infty} \phi(R) = 0$. Donc,

$$-2i \int_{-R}^R \frac{e^{ax} e^{\pi i a} \sin a\pi}{1+e^x} dx = -2\pi i e^{\pi a i} - \phi(R)$$

d'où

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx = \frac{\pi}{\sin a\pi}, \quad 0 < a < 1.$$

Fin de l'exemple.

Parfois la méthode des résidus est utile pour évaluer des intégrales de la forme

$$\int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$$

où R est une fonction rationnelle de ses deux arguments. L'exemple est indicatif de la méthode générale.

Exemple 7.2.5 *Évaluer*

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5+4\cos \theta}.$$

Solution

Soit C le cercle unitaire défini par $\{z : z = e^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi)\}$. Ici on voit que

$$\cos \theta = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \quad \sin \theta = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right).$$

Donc,

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 + 4 \cos \theta} = -i \int_C \frac{dz}{2z^2 + 5z + 2} = -i \int_C \frac{dz}{(2z + 1)(z + 2)}.$$

Donc, la fonction f définie par $f(z) = (2z + 1)^{-1}(z + 2)^{-1}$ a un pôle à l'intérieur du cercle. Il résulte que

$$I = -i(2\pi i)R_f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\pi \lim_{z \rightarrow -\frac{1}{2}} \left(z + \frac{1}{2}\right) f(z) = 2\pi \lim_{z \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{1}{2(z + 2)} = \frac{2\pi}{3}.$$

Fin de l'exemple.

Exemple 7.2.6 *Évaluer*

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n} \theta \, d\theta, \quad n \in \mathbb{N}$$

Solution

En procédant de la même façon que dans l'exemple précédent on voit que l'intégrale se transforme en l'intégrale suivante sur le cercle unitaire:

$$I = \frac{1}{2^{2n}} i \int_C \left(z + \frac{1}{z}\right)^{2n} \frac{dz}{z}$$

Le résidu de la fonction $z^{-1}(z + z^{-1})^{2n}$ à l'origine, où se retrouve sa seule singularité, est

$$R_f(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} z^{2k-2n-1} dz = \binom{2n}{n}$$

Donc,

$$I = \frac{\pi(2n)!}{2^{2n-1}(n!)^2} = \frac{\pi(2n)(2n-1)\dots(n+1)}{2^{2n-1}n!}$$

Lorsque nous devons utiliser les méthodes de l'analyse complexe pour évaluer une intégrale réelle il faut constater que nous sommes immédiatement confronté avec deux choix importants. D'abord, le choix de la fonction complexe à intégrer et puis le contour à utiliser pour l'intégration. Malheureusement, il n'y a pas un « algorithme » parfait pour nous aider et, en général, le nombre de possibilités valables est illimité. Néanmoins, voici quelques principes généraux (lesquels admettent une infinité d'exceptions).

Supposons que l'intégrale réelle à évaluer soit $\int_a^b g(x) dx$ avec $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

- Choisir la fonction complexe f à intégrer de telle manière que lorsque $z = x + 0i$, g coïncide avec f , $\Re(f)$ ou $\Im(f)$. (Voir les Exemples 7.2.2, 7.2.3 et 7.2.4.)

- Examiner la possibilité de simplification du problème par le biais d'une substitution. (Voir les Exemples 7.2.4 et 7.2.5.)
- Choisir le contour de telle manière qu'il ne passe par aucune singularité de la fonction f et ne contient qu'un nombre fini de pôles de cette fonction. **Il faut qu'aucune autre type de singularité se retrouve à l'intérieur du contour.** (On verra plus loin le rôle joué par les singularités qui ne sont pas des pôles.)

Dans ce qui suit plusieurs autres exemples d'intégration seront étudiés.

7.3 INTÉGRATION AUTOUR D'UN POINT DE RAMIFICATION.

Dans le cas de certaines fonctions telles que $\sqrt[n]{z}$ et $\log z$ on a vu que si on veut les considérer comme des vraies fonctions il faut choisir leur domaine comme une surface de Riemann appropriée. Il est possible de traiter une partie d'une telle fonction comme étant une fonction avec un domaine dans \mathbb{C} . Par exemple, on ne peut prendre pour le domaine de $\log z$, $\mathbb{C} - \{0\}$, car à chaque point de cet ensemble correspond une infinité de valeurs pour $\log z$ mais, si on définit la fonction $\text{Log}_{\theta_0} z$ par

$$\text{Log}_{\theta_0} z = \log |z| + i\theta$$

où θ représente l'argument unique de z contenu dans l'intervalle $\theta_0 - \pi < \theta = \text{amp}(z) \leq \theta_0 + \pi$, alors Log_{θ_0} est une fonction $\mathbb{C} - \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ qui est régulière pour tout z de \mathbb{C} à l'exception des points sur la demi-droite $\theta = \theta_0$ et, bien sûr, l'origine en particulier. Cette fonction Log_{θ_0} est une ramification de \log . Chaque point de la demi-droite $\theta = \theta_0$ est une singularité (non-isolée) de Log_{θ_0} . Si Γ est un contour fermé simple contenant l'origine à son intérieur alors Γ passe par au moins une singularité de Log_{θ_0} . À cause de ce fait nous considérons, en conjonction avec Log_{θ_0} , uniquement les contours fermés simples qui ne passent pas par l'origine et qui ne contiennent pas l'origine à leur intérieur.

En général, supposons que $z \mapsto F(z)$ représente une relation associant plusieurs valeurs $F(z)$ à chaque z d'une région de \mathbb{C} . On dit qu'une fonction f , définie sur cette même région, est une **ramification** de F si à chaque point où F et f sont définies, $f(z)$ est une des valeurs possibles de $F(z)$ et, à part certains points d'un nombre fini d'arcs contenus dans la région de définition de f , cette fonction est holomorphe. S'il existe un point qui est une singularité pour toutes les ramifications de F , ce point s'appelle **point de ramification** de F .

Exemple 7.3.1 *Considérons la relation définie par $F = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : w^2 = z\}$. Comme nous avons déjà vu F définit implicitement deux fonctions holomorphes sur $\mathbb{C} - \Gamma$ où Γ est l'arc (une demi-droite dans ce cas) défini par $\Gamma = \{z : z = x + 0i, x \leq 0\}$ notamment les fonctions correspondantes aux racines carrées de z . Chacune de ces deux fonctions est définie pour tout point Γ mais elles n'y sont pas régulières et chacune d'elles est une ramification de F .*

Le partage des points de F en deux fonctions holomorphes pourrait aussi être accompli en utilisant n'importe quelle courbe simple partant de l'origine et terminant au point ∞ . Peu importe la courbe choisie les points 0 et ∞ seraient toujours des singularités des deux fonctions résultant et ils sont, donc, des points de ramification.

Fin de l'exemple.

L'analyse de cet exemple s'applique également aux fonctions $\sqrt[n]{z}$, ($n > 0$) et $\log z$ pour déterminer que 0 et ∞ sont des points de ramification de chacune d'elles.

Or, considérons le problème de l'évaluation de l'intégrale $\int_C z^{\alpha-1} f(z) dz$ où $f(z) = P(z)/Q(z)$ représente une fonction rationnelle en z qui devient une fonction réelle lorsque $z = x + 0i$ et α est une valeur complexe quelconque. Si α n'est pas un entier l'origine est un point de ramification de $z^{\alpha-1}$ d'où un contour fermé simple qui contient l'origine à son intérieur doit nécessairement passer par au moins un point où $z^{\alpha-1}$ n'est pas continue. Plus précisément, supposons que Q n'ait pas de zéro sur l'axe des x positifs. Dans ce cas on choisit une ramification de $z^{\alpha-1}$ pour laquelle les points de cette partie de l'axe réel sont des singularités. Une telle ramification pourrait être

$$g(z) = e^{(\alpha-1)\text{Log}_\pi z}$$

Soit C_r et C_R deux cercles centrés à l'origine avec $0 < r < R$ où r et R sont choisis de façon que tous les pôles de $P(z)/Q(z)$ (à part possiblement de 0) sont contenus dans la région entre ces deux cercles.

Considérons deux droites définies par $y = \epsilon$ et $y = -\epsilon$ pour $\epsilon > 0$ très petit. Ces droites coupent les deux cercles en quatre points dans la région du plan défini par $\Re(z) > 0$. Notons ces points par A, B, C, D .

Supposons que $\Gamma = \overline{BD} \cup [D, C] \cup \overline{CA} \cup [A, B]$ comme dans le Diagramme VII.3.1. Si $\epsilon > 0$ est assez petit, tous les zéros de P/Q se retrouvent à l'intérieur de Γ (sauf peut-être 0). Alors, si on utilise la ramification $g(z)$ de $z^{\alpha-1}$, on peut appliquer le Théorème de Cauchy pour déduire que

$$\int_\Gamma g(z) \frac{P(z)}{Q(z)} dz = 2\pi i \sum R(z_\beta)$$

où la somme est celle des résidus de gP/Q dans la région définie par $0 < |z| < \infty$. Or, si

$$\lim_{r \rightarrow 0} z g(z) \frac{P(z)}{Q(z)} = \lim_{R \rightarrow \infty} z g(z) \frac{P(z)}{Q(z)} = 0$$

on voit que

$$\left| \int_{C_R} g(z) \frac{P(z)}{Q(z)} dz \right| \leq \int_0^{2\pi} \left| z^\alpha \frac{P(z)}{Q(z)} \right| d\theta \rightarrow 0$$

lorsque $R \rightarrow \infty$ et

$$\left| \int_{C_r} g(z) \frac{P(z)}{Q(z)} dz \right| \leq \int_0^{2\pi} \left| z^\alpha \frac{P(z)}{Q(z)} \right| d\theta \rightarrow 0$$

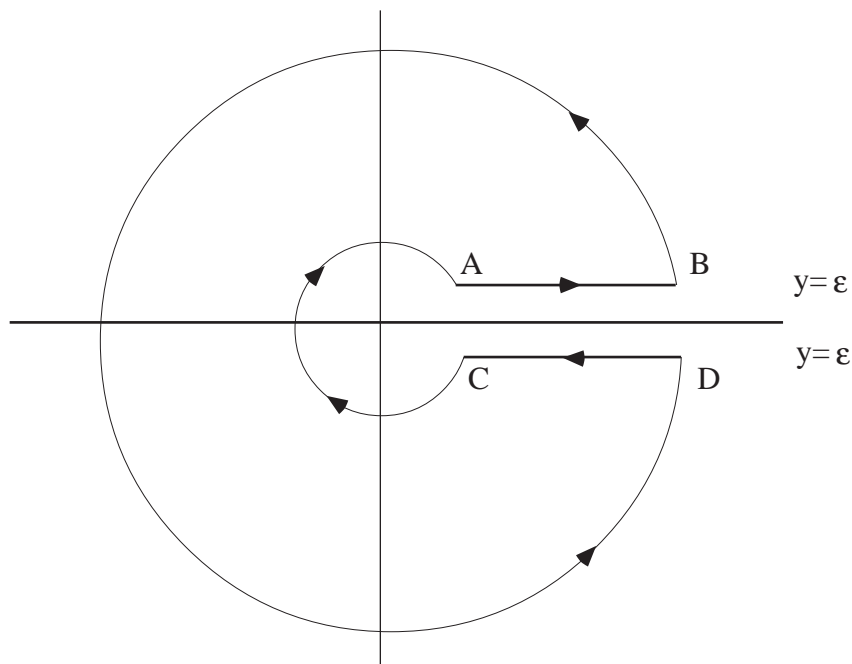


Figure 7.7:

quand $r \rightarrow 0$. Donc,

$$\int_{AB} g(z) \frac{P(z)}{Q(z)} dz + \int_{DC} g(z) \frac{P(z)}{Q(z)} dz = \Delta + 2\pi i \sum R(z_\beta)$$

où $\Delta \rightarrow 0$ lorsque $r \rightarrow 0$ et $R \rightarrow \infty$. Si on laisse $\epsilon \rightarrow 0$, on voit que dans la première intégrale la fonction

$$g(z) \frac{P(z)}{Q(z)} \rightarrow \frac{P(x)}{Q(x)} e^{(\alpha-1) \log x}$$

tandis que dans le deuxième cas

$$g(z) \frac{P(z)}{Q(z)} \rightarrow e^{2\pi i \alpha} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{(\alpha-1) \log x} .$$

Donc, lorsque $r \rightarrow 0$, $R \rightarrow \infty$ et $\epsilon \rightarrow 0$, on trouve que

$$\int_0^\infty e^{(\alpha-1) \log x} \frac{P(x)}{Q(x)} dx - e^{2\pi i \alpha} \int_0^\infty e^{(\alpha-1) \log x} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum R(z_\beta)$$

ou

$$\int_0^\infty e^{(\alpha-1) \log x} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \frac{2\pi i \sum R(z_\beta)}{1 - e^{2\pi i \alpha}}$$

ou encore

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \frac{2\pi i \sum R(z_\beta)}{1 - e^{2\pi i \alpha}}. \quad (7.3)$$

La validité de cette formule ne dépend pas de la ramification de $z^{\alpha-1}$ que nous avons utilisée (Pourquoi?), mais lorsque α est réel, on choisit la ramification pour laquelle $x^{\alpha-1}$, évalué sur \overline{AB} , tend vers une valeur réelle positive.

Exemple 7.3.2 *Évaluer*

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Solution

Posons $f(z) = z^\alpha/(1+z)$. On vérifie facilement que

$$\lim_{|z| \rightarrow 0} \left| \frac{z^\alpha}{1+z} \right| = \lim_{|z| \rightarrow \infty} \left| \frac{z^\alpha}{1+z} \right| = 0.$$

Donc,

$$I = \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = \frac{2\pi i R_f(-1)}{1 - e^{2\pi i \alpha}}$$

où

$$R_f(-1) = \lim_{z \rightarrow -1} (1+z) \frac{z^{\alpha-1}}{1+z} = (-1)^{\alpha-1} = -e^{\pi i \alpha}.$$

Alors

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin \alpha \pi}$$

comme nous avons déjà vu dans la Section 7.2.

Fin de l'exemple.

Parfois nous pouvons obtenir ses résultats supplémentaires intéressants par l'emploi des substitutions dans les résultats connus.

Exemple 7.3.3 *Utiliser une substitution dans le résultat de l'exemple précédant pour montrer que si $0 < \alpha < 2$*

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2 \sin \frac{\pi \alpha}{2}}$$

et en déduire que

$$\text{A) } \int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^2} dx = 0, \quad \text{B) } \int_0^\infty \frac{\log^2 x}{1+x^2} dx = \frac{\pi^3}{8}$$

Solution

À cause de l'expression $1+x$ dans le dénominateur de l'intégrale de l'Exemple 7.3.2 on essaie la substitution $x = u^2$ ce qui nous donne

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = 2 \int_0^\infty \frac{u^{2\alpha-1}}{1+u^2} du.$$

Remplaçons α par $\beta/2$ pour trouver

$$2 \int_0^\infty \frac{u^{\beta-1}}{1+u^2} = \frac{\pi}{\sin \frac{\beta\pi}{2}}$$

et, par une modification des noms

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2 \sin \frac{\alpha\pi}{2}}, \quad 0 < \alpha < 2.$$

Une application de la règle de Leibnitz pour la dérivation d'une intégrale réelle de la forme $\int_0^\infty f(x, \alpha) dx$ par rapport au paramètre α nous montre que

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1} \log x}{1+x^2} dx = \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\pi}{2 \sin \frac{\alpha\pi}{2}} = -\frac{\pi^2 \cos \frac{\alpha\pi}{2}}{4 \sin^2 \frac{\alpha\pi}{2}} = -\frac{\pi^2}{4} \operatorname{csc} \frac{\alpha\pi}{2} \cot \frac{\alpha\pi}{2} \quad (7.4)$$

et, en particulier, si $\alpha = 1$

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^2} dx = 0.$$

Or une autre application de la règle de Leibnitz, cette fois-ci à l'expression dans (7.4) produit

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1} \log^2 x}{x^2+1} dx = \frac{\pi^3}{8} \frac{1+2 \cos^2 \frac{\alpha\pi}{2}}{\sin^3 \frac{\alpha\pi}{2}}$$

d'où B suit avec $\alpha = 1$.

Fin de l'exemple.

Il est à noter que la formule 7.3 n'a aucun sens lorsque α est un entier. Dans ce cas $z^{\alpha-1}f(z)$ est elle-même une fonction rationnelle et on procède comme nous avons fait auparavant.

Il n'est pas difficile de vérifier que si $a > 0$ alors

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{a+x} dx = \frac{2\pi a^{\alpha-1} e^{\pi i a}}{e^{2\pi i a} - 1} = \frac{a^{\alpha-1} \pi}{\sin \pi \alpha}. \quad (7.5)$$

Si on dérive cette intégrale par rapport au paramètre a , on trouve que

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{(x+a)^2} dx = \frac{\pi(1-\alpha)a^{\alpha-2}}{\sin \pi \alpha}$$

et en continuant de cette façon on peut évaluer les intégrales de la forme

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{(x+a)^n} dx, \quad n = 2, 3, \dots$$

Avec un peu d'imagination le lecteur sera en mesure de trouver les valeurs des intégrales telles que

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha}}{x^2 + b^2} dx = \frac{\pi b^{\alpha-1}}{2 \cos \frac{\pi\alpha}{2}}, \quad b > 0, 0 < \alpha < 1$$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)^n} = \frac{\pi(2n-2)!}{2^{2n-2}[(n-1)!]^2}.$$

Le résultat suivant fournit une formule générale pour l'évaluation des intégrales d'une certaine classe de fonctions rationnelles sur l'intervalle $(0, \infty)$.

Théorème 7.3.1 *Si $f(z) = P(z)/Q(z)$ représente une fonction rationnelle avec les propriétés:*

1. *Le degré n de $Q(z)$ excède celui, m , de $P(z)$ par au moins deux ($n - m \geq 2$);*
2. *$Q(z)$ n'a aucune racine réelle non-négative.*

Alors,

$$\int_0^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = -S$$

où S est la somme des résidus de la fonction $\frac{P(z)}{Q(z)} \text{Log } z$ aux points qui sont les zéros de $Q(z)$.

Démonstration

Nous intégrerons la fonction $\frac{P(z)}{Q(z)} \text{Log } z$ le long du contour de la Figure 7.7. D'abord, sur le grand cercle on observe que, si R est suffisamment grand, il existe une constante positive K telle que

$$R > K \quad \longrightarrow \quad \left| \frac{P(z)}{Q(z)} \right| \leq \frac{K}{R^2}$$

à cause de l'hypothèse 1. Il en résulte que

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R} \frac{P(z) \text{Log } z}{Q(z)} dz \right| &\leq \int_0^{2\pi} \left| \frac{P(z)}{Q(z)} \right| R |\text{Log } R + i\theta| d\theta \\ &\leq \int_0^{2\pi} \frac{K}{R} (\log R + \theta) d\theta \\ &= 2\pi K \frac{\log R}{R} + \frac{2\pi^2}{R} \end{aligned}$$

ce qui tend vers 0 lorsque $R \rightarrow \infty$. Donc,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{P(z)}{Q(z)} \operatorname{Log} z \, dz = 0.$$

Quant au petit cercle on observe que, pour r suffisamment petit,

$$\left| \frac{P(z)}{Q(z)} \right| \leq J = \max \left\{ 1, 2 \left| \frac{P(0)}{Q(0)} \right| \right\}.$$

Donc,

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_r} \frac{P(z)}{Q(z)} \operatorname{Log} z \, dz \right| &\leq \int_0^{2\pi} Jr |\log r + i\theta| \, d\theta \\ &= 2\pi Jr (\log r + \pi). \end{aligned}$$

Mais cette expression tend vers 0 lorsque $r \rightarrow 0$. Donc,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} \frac{P(z)}{Q(z)} \operatorname{Log} z \, dz = 0.$$

Donc, selon la notation de la Figure 7.7

$$\int_{AB} \frac{P(z)}{Q(z)} \operatorname{Log} z \, dz + \int_{DC} \frac{P(z)}{Q(z)} \operatorname{Log} z \, dz + \Phi(r, R) = 2\pi i S$$

où $\Phi(r, R)$ tend vers 0 lorsque, simultanément, $r \rightarrow 0$ et $R \rightarrow \infty$.

Il faut tenir compte qu'en faisant le tour du grand cercle l'argument de z crût par presque 2π de telle sorte que quand $\epsilon \rightarrow 0$, superimposant les segments \overline{AB} et \overline{CD} sur l'intervalle $[r, R]$, Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} 2\pi S &= \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \left(\int_r^R \frac{P(x)}{Q(x)} \log x \, dx + \int_R^r \frac{P(x)}{Q(x)} (\log x + 2\pi) \, dx + \Phi(r, R) \right) \\ &= -2\pi \int_0^\infty \frac{P(x)}{Q(x)} \, dx \end{aligned}$$

et il suit immédiatement que

$$\int_0^\infty \frac{P(x)}{Q(x)} \, dx = -S.$$

C.Q.F.D. ■

Exemple 7.3.4 Évaluer

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2 + 5x + 6)(x^2 + 1)}.$$

Solution

Ici on constate que les hypothèses du Théorème 7.3.1 sont satisfaites de telle sorte que nous utiliserons la fonction auxiliaire

$$f(z) = \frac{\text{Log } z}{(z^2 + 5z + 6)(z^2 + 1)}.$$

On vérifie facilement que

$$\begin{aligned} R_f(-2) &= \frac{\log 2 + \pi i}{5} & R_f(-3) &= -\frac{\log 3 + \pi i}{10} \\ R_f(i) &= \frac{\pi(1-i)}{40} & R_f(-i) &= -\frac{3\pi(1+i)}{40} \end{aligned}$$

et

$$S = R_f(-2) + R_f(-3) + R_f(i) + R_f(-i) = \frac{1}{5} \log 2 - \frac{1}{10} \log 3 - \frac{\pi}{20}$$

et selon le théorème nous avons trouvé que

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2 + 5x + 6)(x^2 + 1)} = -\frac{1}{5} \log 2 + \frac{1}{10} \log 3 + \frac{\pi}{20}.$$

Dans ce cas il n'est pas trop difficile de vérifier par les méthodes de calcul réel que

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 5x + 6)(x^2 + 1)} = \frac{\arctan(x)}{10} + \frac{\log(2+x)}{5} - \frac{\log(3+x)}{10} - \frac{\log(1+x^2)}{20}.$$

L'évaluation de ceci entre les limites 0 et ∞ confirme le résultat.

Fin de l'exemple.

7.4 LA VALEUR PRINCIPALE D'UNE INTÉGRALE.

Soit f une fonction réelle continue sur $a \leq x < c$ et $c < x \leq b$ où $-\infty < a < c < b < \infty$. Pour tout $\epsilon > 0$ considérons la somme

$$I(\epsilon) = \int_a^{c-\epsilon} f(x) dx + \int_{c+\epsilon}^b f(x) dx.$$

Il est clair que cette somme existe pour tout $\epsilon > 0$. Si $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} I(\epsilon)$ existe et est un nombre réel fini alors elle s'appelle **valeur principale** de l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ et on écrit

$$V.P. \int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_a^{c-\epsilon} f(x) dx + \int_{c+\epsilon}^b f(x) dx \right].$$

Rappelons que si f est définie sur $[a, c) \cup (c, b]$ alors la valeur de l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$, si elle existe, est définie par

$$\lim_{\epsilon \rightarrow c^+} \int_\epsilon^b f(x) dx + \lim_{\eta \rightarrow c^-} \int_a^\eta f(x) dx.$$

où les limites sont calculées séparément. Donc, il est possible que la valeur principale d'une intégrale existe même si la valeur de l'intégrale n'est pas définie!

Exemple 7.4.1 $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x}$ n'existe pas car

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \ln |x| \Big|_{\epsilon}^1 + \lim_{\eta \rightarrow 0^-} \ln |x| \Big|_{-1}^{\eta} = -\infty + \infty$$

une forme indéterminée. Néanmoins, la valeur principale de cette intégrale est

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\ln |x| \Big|_{\epsilon}^1 - \ln |x| \Big|_{-1}^{-\epsilon} \right] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [\ln 1 - \ln \epsilon - \ln |-1| + \ln |-\epsilon|] = 0.$$

Dans le cas où l'une ou l'autre des valeurs a, b est infinie on peut aussi définir la valeur principale. Par exemple, si f est continue sur $[a, b]$, $a < b$, pour toutes les valeurs $a, b \in \mathbb{R}$. alors

$$V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow +\infty} \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} f(x) dx.$$

Théorème 7.4.1 Supposons que f soit holomorphe sur une région Ω contenant les intervalles réels $[a, c)$ et $(c, b]$ et que f possède un pôle simple en c . Alors $V.P. \int_a^b f(x) dx$ existe.

Démonstration

Posons

$$I(\epsilon) = \int_a^{c-\epsilon} \frac{dx}{x-c} + \int_{c+\epsilon}^b \frac{dx}{x-c}.$$

Alors,

$$I(\epsilon) = \log \left| \frac{b-c}{c-1} \right| = V.P. \int_a^b \frac{dx}{x-c}.$$

Or, $f(x) = g(x)/(x-c)$ où $g(c) \neq 0$ et g est holomorphe en c . Donc,

$$\lim_{z \rightarrow c} \frac{g(z) - g(c)}{z - c} = g'(c).$$

Soit

$$\lambda(z) = \frac{g(z) - g(c)}{z - c} - g'(c).$$

Si $z \neq c$ est un point de Ω alors λ est continue. En définissant $\lambda(c) = 0$ on a que λ est continue sur Ω . Donc,

$$\begin{aligned} V.P. \int_a^b f(x) dx &= V.P. \int_a^b \frac{[\lambda(x) + g'(c)](x-c) + g(c)}{x-c} dx \\ &= V.P. \left[\int_a^b \frac{g(c)}{x-c} dx + \int_a^b [\lambda(x) + g'(c)] dx \right] \\ &= g(c) \log \left| \frac{b-c}{c-a} \right| + g'(c)(b-a) + \int_a^b \lambda(x) dx. \end{aligned}$$

Comme λ est continue dans $[a, b]$ cette dernière intégrale existe.

C.Q.F.D. ■

Exemple 7.4.2 Si $0 < a < 1$ montrer que

$$\text{V.P.} \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1-x} dx = \pi \cot a\pi.$$

Solution

On évalue

$$\int_\Gamma \frac{z^{a-1}}{z-1} dz$$

où Γ est le contour de la Figure 7.8.

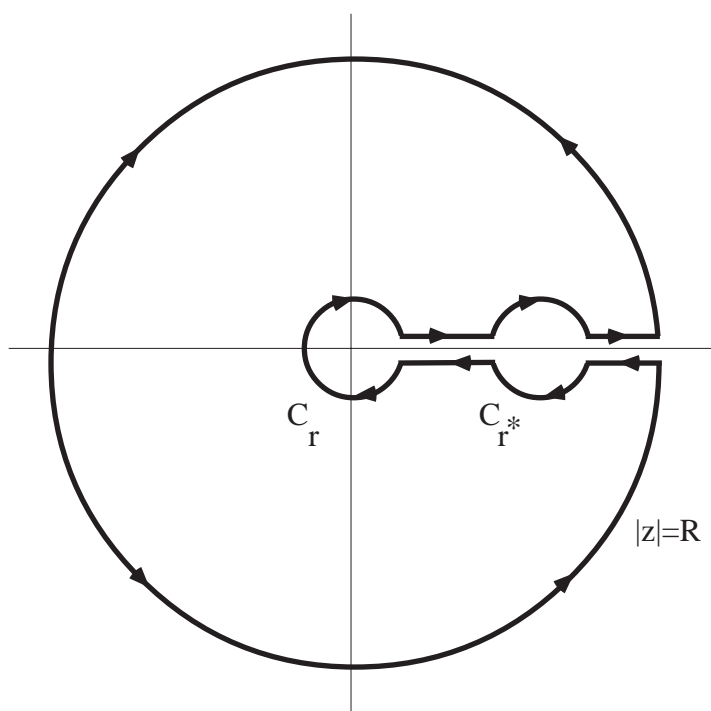


Figure 7.8:

On note que $z = 0$ est un point de ramification de cette fonction et il faut traiter soigneusement les intégrales le long de l'axe réel. (La figure indique les directions à suivre mais, bien entendu, les segments parallèles finissent par être confondus avec les segments correspondants sur l'axe réel.) D'abord, le long de grand cercle $|z| = R$ on trouve que

$$\left| \int_{C_R} \frac{z^{a-1}}{z-1} dz \right| = \left| \int_0^{2\pi} \frac{R^{a-1} e^{i\theta(a-1)}}{R e^{i\theta} - 1} iR d\theta \right| \leq \frac{2R^a \pi}{R-1} \rightarrow 0, \quad \text{lorsque } R \rightarrow \infty.$$

À partir du point $(R, 0)$ on traverse le segment au dessous de l'axe réel pour continuer sur la partie inférieur du cercle C_r^* . Ici on peut considérer la ramification de z^{a-1} comme étant celle qui donne des valeurs positives pour $z = x + 0i, x > 0$. De plus, pour cette ramification,

$$\lim_{|z-1| \rightarrow 0} (z-1) \frac{z^{a-1}}{z-1} = 1.$$

Lorsqu'on se retrouve éventuellement sur ce cercle, l'amplitude de z aura augmenté de 2π et il faut considérer z^{a-1} comme étant remplacée par $z^{a-1} e^{2\pi ia}$ où z^{a-1} est la valeur provenant de la ramification utilisée dans le premier cas. Donc,

$$\lim_{|z-1| \rightarrow 0} (z-1) \frac{z^{a-1} e^{2\pi ia}}{z-1} = e^{2\pi ia}.$$

On trouve alors en ce qui concerne le cercle C_r^* que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r^*} f(z) dz = -\pi i (1 + e^{2\pi ia}).$$

Il est laissé en exercice de montrer que les intégrales autour des cercles $|z| = R$ et C_r tend vers zéro lorsque $r \rightarrow 0$ et $R \rightarrow \infty$. Comme $x = 1$ est une singularité de f dans l'intervalle $[0, \infty)$ on conclut que

$$V.P. \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{x-1} dx + V.P. \int_\infty^0 \frac{x^{a-1} e^{2\pi ia}}{x-1} dx - \pi i (e^{2\pi ia} + 1) = 0$$

d'où

$$V.P. \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{x-1} dx = \pi \cot a\pi.$$

Fin de l'exemple.

7.5 CERTAINES FONCTIONS SPÉCIALES.

L'intégrale d'Euler de la première espèce s'appelle, normalement, la **fonction Beta**. Elle est la fonction réelle B définie par l'intégrale

$$B(m, n) = \int_0^1 t^{m-1} (1-t)^{n-1} dt. \tag{7.6}$$

La fonction Beta est symétrique par rapport à ses deux arguments. Pour voir ceci on fait la substitution $t = 1 - s$ dans l'intégrale et voilà

$$B(m, n) = \int_0^1 s^{n-1} (1-s)^{m-1} ds = B(n, m).$$

Posons $t = s/(s + 1)$ ou, si on le préfère, $s = t/(1 - t)$. Il en résulte que

$$B(m, n) = \int_0^\infty \frac{s^{m-1}}{(1+s)^{m+n}} ds. \quad (7.7)$$

Si $m = p$, $n = 1 - p$ et $0 < p < 1$ on trouve que

$$B(p, 1 - p) = \int_0^\infty \frac{s^{p-1}}{1+s} ds = \frac{\pi}{\sin p\pi}. \quad (7.8)$$

En cet égard voir l'Exemple 7.3.1.

Il est possible de présenter l'intégrale définissant la fonction Beta dans des formes différentes par le biais des substitutions. Par exemple, la substitution $t = \sin^2 \phi$ nous donne

$$B(m, n) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-1} \phi \cos^{2n-1} \phi d\phi. \quad (7.9)$$

L'intégrale d'Euler de la deuxième espèce s'appelle **la fonction Gamma**. Cette fonction Γ dont le domaine est l'ensemble de tous les nombres complexes dont la partie réelle est positive est définie par

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$$

où on utilise la ramification de t^{z-1} qui prend des valeurs réelles lorsque z est réel.

La fonction Γ est une généralisation de la fonction factorielle. Pour se convaincre de cela on procède à une tentative d'évaluation utilisant la méthode d'intégration par parties. Posons $u = t^{z-1}$, $dv = e^{-t} dt$, $du = (z-1)t^{z-2} dt$, $v = -e^{-t}$. Alors,

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt = -t^{z-1} e^{-t} \Big|_0^\infty + (z-1) \int_0^\infty t^{z-2} e^{-t} dt.$$

Or, par une application de la règle de l'Hôpital, on voit que $\lim_{t \rightarrow \infty} t^{z-1} e^{-t} = 0$. De plus, $\lim_{t \rightarrow 0} t^{z-1} e^{-t} = 0$ si $\Re(z) > 0$. Donc, lorsque les deux intégrales convergent, l'identité suivante est valide

$$\Gamma(z) = (z-1)\Gamma(z-1).$$

Il est facile à voir que $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1$. Il s'ensuit que si n est un entier positif, $\Gamma(n) = (n-1)!$.

Maintenant nous allons établir une relation entre les fonctions Γ et B . Supposons que m soit un nombre réel positif. Dans l'intégrale qui définit Γ faisons la substitution $x = \sqrt{t}$. Alors

$$\Gamma(m) = 2 \int_0^\infty x^{2m-1} e^{-x^2} dx. \quad (7.10)$$

Donc, si $m, n \in \mathbb{R}_+^*$

$$\Gamma(m)\Gamma(n) = 4 \int_0^\infty \int_0^\infty x^{2m-1} y^{2n-1} e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$$

En coordonnées polaires ce résultat devient

$$\Gamma(m)\Gamma(n) = \left[2 \int_0^\infty f^{2m+2n-1} r^{-r^2} dr \right] \left[2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} \theta \cos^{2m-1} \theta d\theta \right] = \Gamma(m+n) B(m, n).$$

Donc, si $m, n \in \mathbb{R}_+^*$

$$B(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}. \quad (7.11)$$

Exemple 7.5.1 Montrer que

$$\frac{B(m+1, n)}{B(m, n+1)} = \frac{m}{n}.$$

Solution

$$\frac{B(m+1, n)}{B(m, n+1)} = \frac{\Gamma(m+1)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n+1)} \frac{\Gamma(m+n+1)}{\Gamma(m)\Gamma(n+1)} = \frac{m\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m)n\Gamma(n)} = \frac{m}{n}.$$

Fin de l'exemple.

Exemple 7.5.2 Évaluer $\Gamma(\frac{1}{2})$.

Solution

Nous savons que si $0 < p < 1$, $B(p, 1-p) = \pi / \sin p\pi$. Donc

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = \pi$$

d'où $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi} = (-\frac{1}{2})!$.

Fin de l'exemple.

Certaines intégrales réelles peuvent être évaluées facilement si on reconnaît leur relation avec les définitions des fonctions B et Γ .

Exemple 7.5.3 Montrer que

$$\int_1^\infty \frac{(x-1)^p}{x^2} dx = \Gamma(1+p)\Gamma(1-p).$$

Solution

On fera la substitution $u = x - 1$ dans l'intégrale ce qui mène à

$$\int_1^\infty \frac{(x-1)^p}{x^2} dx = \int_0^\infty \frac{u^p}{(1+u)^2} du = B(1+p, 1-p) = \frac{\Gamma(1+p)\Gamma(1-p)}{\Gamma(2)} = \Gamma(1+p)\Gamma(1-p).$$

Fin de l'exemple.

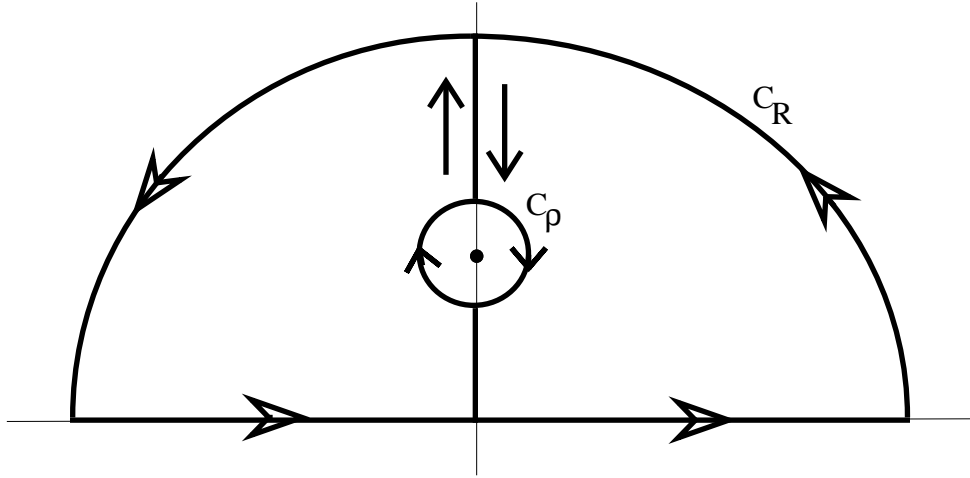


Figure 7.9:

La réponse à certains problèmes s'exprime de manière plus succincte si on utilise la fonction Γ .

Exemple 7.5.4 Intégrer $f(z) = e^{ibz}/(r+iz)^a$ $0 < a < 1$, $r > 0$, $b > 0$ autour du contour 7.9. où on suppose que $\text{amp}(r+iz) = 0$ aux points sur l'axe des y entre 0 et ir , pour prouver que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ibx}}{(r+ix)^a} dx = \frac{2\pi}{\Gamma(a)} b^{a-1} e^{-br}.$$

Solution

Sur la courbe C_R on note que si $R > r$

$$\left| \int_{C_R} \frac{e^{ibz}}{(r+iz)^a} dz \right| \leq \int_0^\pi \left| \frac{e^{ibR(\cos\theta+i\sin\theta)} R i e^{i\theta}}{[r+iR(\cos\theta+i\sin\theta)]^a} d\theta \right| \leq R \int_0^\pi \left| \frac{e^{-bR\sin\theta}}{[r-R\sin\theta+iR\cos\theta]^a} d\theta \right| \leq$$

$$\frac{R}{(R-a)^a} \int_0^\pi e^{-bR\sin\theta} d\theta < \frac{R\pi}{(R-r)^a R} = \frac{\pi}{(R-r)^a}$$

qui tend vers zéro lorsque $R \rightarrow \infty$.

Il est laissé en exercice de prouver que, lorsque $\rho \rightarrow 0$, $\int_{C_p} f(z) dz$ tend vers zéro.

Or, f est régulière à l'intérieur de contour décrit dans la Figure 7.9 ce qui implique que

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ibx}}{(r+ix)^a} dx = i \int_r^\infty \frac{e^{-by}}{(r-y)^a} dy - e^{2\pi ia} i \int_r^\infty \frac{e^{-by}}{(r-y)^a} dy.$$

(Notons que le point ir est un point de ramification de f ce qui explique le facteur multiplicatif $e^{2\pi ia}$.)

Faisons la substitution $u = r - y$ pour obtenir

$$I = (1 - e^{2\pi ia}) i \int_0^{-\infty} \frac{e^{-b(r-u)}}{u^a} (-du) = \frac{1 - e^{2\pi ia}}{i} e^{-br} \int_0^{-\infty} \frac{e^{-bu}}{u^a} du.$$

Maintenant on fait la nouvelle substitution $t = bu$ pour déduire que

$$I = \frac{1 - e^{2\pi ia}}{i} e^{-br} b^{a-1} \int_0^{-\infty} \frac{e^t}{t^a} dt = \frac{e^{2\pi ia} - 1}{i} e^{-br} b^{a-1} \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{(-t)^a} dt.$$

En utilisant le fait que $-t = e^{\pi i} t$ on trouve que

$$I = \frac{e^{\pi ia} - e^{-\pi ia}}{i} e^{-br} b^{a-1} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{-a} dt = 2e^{-br} b^{a-1} \Gamma(1-a) \sin \pi a.$$

Mais, d'après l'Exemple 7.5.2, $\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \pi / \sin \pi a$ si $0 < a < 1$ ce qui nous amène à la conclusion

$$I = \frac{2\pi}{\Gamma(a)} e^{-br} b^{a-1}.$$

Fin de l'exemple.

Exemple 7.5.5 *Établir la formule de duplication suivante pour la fonction Γ .*

$$\Gamma(2p) = \frac{2^{2p-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(p) \Gamma(p + \frac{1}{2}).$$

Solution

Dans l'intégrale qui définit $B(\frac{1}{2}, p)$ on fait la substitution $t = (2\xi - 1)^2$ ce qui nous donne

$$B(\frac{1}{2}, p) = \int_0^1 t^{-\frac{1}{2}} (1-t)^{p-1} dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 4 \left(1 - (2\xi - 1)^2\right)^{p-1} d\xi = \int_{\frac{1}{2}}^1 2^{2p} \xi^{p-1} (1-\xi)^{p-1} d\xi.$$

Par le biais de la substitution $\eta = 1 - \xi$ on trouve facilement que

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 2^{2p} \xi^{p-1} (1-\xi)^{p-1} d\xi = \int_0^{\frac{1}{2}} 2^{2p} \eta^{p-1} (1-\eta)^{p-1} d\eta.$$

Donc,

$$B(\frac{1}{2}, p) = 2^{2p-1} B(p, p) = 2^{2p-1} \frac{\Gamma^2(p)}{\Gamma(2p)}$$

et

$$B(\frac{1}{2}, p) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(p)}{\Gamma(p + \frac{1}{2})}.$$

En comparant ces formules on en déduit que

$$\Gamma(2p) = 2^{2p-1} \frac{\Gamma(p)\Gamma(p + \frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})}$$

d'où le résultat suit immédiatement car $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Fin de l'exemple.

Il est à noter que nous pouvons utiliser la formule (7.11) comme la définition de la fonction Beta. Dans ce cas la fonction serait définie pour les valeurs complexes du demi-plan défini par $\{z : \Re(z) > 0\}$. (On peut prouver que $\Gamma(z) \neq 0$ pour tout z de ce demi-plan.

7.6 EXERCICES

SECTION 7.1

7.1 Démontrer le Lemme 7.1.2.

7.2 Utiliser le contour de la Figure 7.2 pour évaluer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x + 1}$$

7.3 La méthode de l'Exemple 7.1.2 semble indiquer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x dx}{x^2 + 1} = 0$$

Mais, par les méthodes réelles

$$\int \frac{x dx}{x^2 + 1} = \log \sqrt{(x^2 + 1)} + \text{constante}$$

et $\lim_{x \rightarrow \infty} \log \sqrt{(x^2 + 1)} = +\infty$. Compléter les détails et expliquer.

7.4 Démontrer le Lemme 7.1.4.

SECTION 7.2

7.5 Montrer que

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} = \frac{\pi}{6}.$$

7.6 Montrer que

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 1} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}.$$

7.7 Montrer que

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{\pi}{2e}.$$

7.8 Montrer que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{1 + \sin^2 \theta} = \pi\sqrt{2}.$$

7.9 Montrer que

$$\int_0^\pi \sin^{2n} \theta \, d\theta = \frac{\pi(2n)!}{(2^n n!)^2}.$$

7.10 Évaluer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}.$$

7.11 Montrer que

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta} = \frac{2\pi}{ab} \quad (a, b \in \mathbb{R}, a \neq b).$$

7.12 Montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^6} = \frac{2\pi}{3}.$$

7.13 Prouver que si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(\alpha^2 + x^2)^2 (\beta^2 + x^2)^2} = \frac{\pi(\alpha^2 + 3\alpha\beta + \beta^2)}{2\alpha^3 \beta^3 (\alpha + \beta)^3}.$$

7.14 Montrer que

$$\int_0^{2\pi} e^{2 \cos \theta} \, d\theta = 2\pi \sum_0^\infty \frac{1}{(n!)^2}.$$

7.15 Si $a > 0$ montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin ax}{x^4 + 4} \, dx = \frac{\pi}{2} e^{-a} \sin a.$$

7.16 Utiliser le contour de la Figure 7.10 pour évaluer

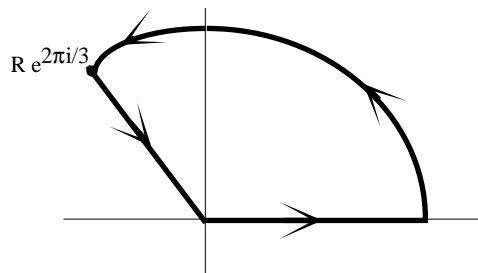


Figure 7.10:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^3 + 1} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

7.17 Montrer que

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{2m}}{x^{2n} + 1} dx = \frac{\pi}{2n \sin\left(\frac{2m+1}{2n}\pi\right)}.$$

7.18 Intégrer la fonction $ze^{imz}/(z^4 + a^4)$ pour montrer que

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin mx}{x^4 + a^4} dx = \frac{\pi}{2a^2} e^{-\frac{ma}{\sqrt{2}}} \sin \frac{ma}{\sqrt{2}}.$$

7.19 Utilise le contour défini par le rectangle avec les côtés $x = \pm R$, $y = 0$, $y = \pi$ pour intégrer $f(z) = e^{az}/\cosh z$ et en déduire que

$$\int_0^{\infty} \frac{\cosh ax}{\cosh x} dx = \frac{\pi}{2} \sec \frac{\pi a}{2} \quad \text{où} \quad -1 < a < 1.$$

SECTION 7.3

7.20 Montrer que

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha}}{x^2 + b^2} dx = \frac{\pi b^{\alpha-1}}{2 \cos \frac{\pi\alpha}{2}} \quad 0 < \alpha < 1, \quad b > 0.$$

7.21 Montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{\pi(2n-2)!}{2^{2n-2}[(n-1)!]^2}.$$

Utiliser le contour de la Figure 7.7 pour les deux problèmes suivants.

7.22 Utiliser le résultat de l'Exemple 7.3.3 pour montrer que

$$\text{A)} \quad \int_0^{\infty} \frac{(\log x)^2}{1+x^2} dx = 0 \quad \text{et} \quad \text{B)} \quad \int_0^{\infty} \frac{\log^2 x}{1+x^2} dx = \frac{\pi^3}{8}$$

7.23 Utiliser la fonction définie par $\frac{(\text{Log } z)^3}{1+z+z^2}$ pour montrer que

$$\int_0^{\infty} \frac{(\log x)^2}{1+x+x^2} dx = \frac{16}{81\sqrt{3}}\pi^3.$$

7.24 Montrer que

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{\sinh x} dx = \frac{\pi^2}{4}.$$

7.25 Choisir un contour approprié (le choix est important) pour intégrer $f(z) = e^{iz} \sqrt{z}$ et en conclure que

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

SECTION 7.4

7.26 Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{Z}$, $V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} x^n dx$ existe-t-elle?

7.27 Si $a > 0$ montrer que

$$V.P. \int_0^{\infty} \frac{r \cos ax}{x^2 - r^2} dx = -\frac{\pi}{2} \sin ar.$$

7.28 Si $a > 0$ montrer que

$$V.P. \int_0^{\infty} \frac{x \sin ax}{x^2 - r^2} dx = \frac{\pi}{2} \cos ar.$$

7.29 Montrer que

$$V.P. \int_0^{\infty} x^{a-1} \sin \left(\frac{a\pi}{2} - bx \right) \frac{dx}{r^2 - x^2} = \frac{\pi}{2} r^{a-2} \cos \left(\frac{a\pi}{2} - br \right)$$

où b et r sont des constantes positives et $0 < a < 3$.

Suggestion: Intégrer $z^{a-1} e^{ibz} / (z^2 - r^2)$ autour du contour de la Figure 7.11.

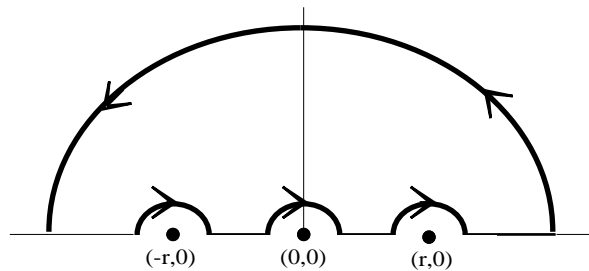


Figure 7.11:

SECTION 7.5

7.30 Évaluer

$$\int_0^{\infty} y^2 e^{-2y^2} dy.$$

7.31 Évaluer

$$\int_0^1 \left(\text{Log} \left(\frac{1}{x} \right) \right)^{-\frac{1}{2}} dx.$$

7.32 Montrer que

$$\Gamma(m) = 2 \int_0^{\infty} x^{2m-1} e^{-x^2} dx \quad m > 0.$$