

## Chapitre 5

# LE THÉORÈME DE CAUCHY

### 5.1 UNE PREMIÈRE DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE CAUCHY.

Dans ce chapitre on présentera le théorème le plus important de l'analyse complexe. Ce résultat, du à Augustin-Louis Cauchy, dit que si  $f$  est une fonction holomorphe dans une région  $\Omega$  et si  $\Gamma$  est un contour fermé simple tel que  $\Gamma \cup \Gamma^\circ \subseteq \Omega$  alors  $\int_\Gamma f(z) dz = 0$ . Il se peut que l'importance de ce résultat ne saute pas aux yeux, mais on verra que pratiquement tous les théorèmes importants du sujet lui dépendent, d'une façon ou d'une autre. Nous ne démontrons pas le théorème de Cauchy dans toute sa généralité à cause des complications de nature topologique qui entre en jeu quant à la région  $\Omega$ . Néanmoins, les versions qu'on présentera seront suffisamment générales pour la plupart des applications de la théorie.

**Exemple 5.1.1** *Montrer que si  $R$  est un rectangle  $\int_R z dz = 0$*

**Solution**

Soient, en ordre cyclique,  $z_0, z_1, z_2, z_3$  les sommets du rectangle. Alors, si  $t \in [0, 1]$  les côtés du rectangle correspondent aux segments décrits par

$$S_1 : z = z_0 + t(z_1 - z_0), \quad S_2 : z = z_1 + t(z_2 - z_1), \quad S_3 : z = z_2 + t(z_3 - z_2), \quad S_4 : z = z_3 + t(z_0 - z_3)$$

Or,  $z_1 - z_0 = z_2 - z_3 = h$  et  $z_2 - z_1 = z_3 - z_0 = k$  car les cotés opposés sont parallèles. Donc,

$$\begin{aligned} \int_R z dz &= \sum_1^4 \int_{S_j} z dz = \\ &= \int_0^1 (z_0 + th)h dt + \int_0^1 (z_1 + tk)k dt + \int_0^1 (z_2 - th)(-h) dt + \int_0^1 (z_3 - tk)(-k) dt = \\ &= z_0h + \frac{h^2}{2} + z_1k + \frac{k^2}{2} - z_2h + \frac{h^2}{2} - z_3k + \frac{k^2}{2} = (z_0 - z_2)h + (z_1 - z_3)k + h^2 + k^2. \end{aligned}$$

Mais  $z_1 - z_3 = h - k$  et  $z_2 - z_0 = h + k$ . Donc la valeur de l'intégrale est zéro.

**Fin de l'exemple.**

Avant d'embarquer dans la première démonstration du théorème principal, il faut présenter deux lemmes. Le premier concerne une propriété topologique et on peut trouver une démonstration en marge de la discussion du Théorème de Heine-Borel dans les bons livres d'analyse réelle. Le deuxième lemme établit une inégalité pour la dérivée.

**Lemme 5.1.1** *Soit  $\{H_n\}$  une suite d'ensembles fermés non-vides de  $\mathbb{C}$  telle que  $H_{n+1} \subseteq H_n, \forall n \in \mathbb{N}$ . Alors, si  $H_1$  est borné,  $H = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} H_n$  n'est pas vide. Si  $\sup_{z, w \in H_n} |z - w|$  tend vers zéro lorsque  $n \rightarrow \infty$  alors il existe  $\alpha \in \mathbb{C}$  tel que*

- 1)  $H = \{\alpha\}$ ,
- 2)  $(\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(H_n \subseteq V(\alpha, \epsilon))$  lorsque  $n > N$ .

Si  $f$  est régulière au point  $z_0$  alors pour tout  $\epsilon > 0$  il existe  $\delta > 0$ , qui dépend de  $z_0$  et de  $\epsilon$ , tel que

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \epsilon \quad (5.1)$$

lorsque  $0 < |z - z_0| < \delta_0$ . Pour prouver le Théorème de Cauchy, on montera d'abord qu'il est possible de diviser la région  $\Omega$  en sous-régions de telle sorte que l'inégalité 5.1 soit satisfaite lorsque  $z$  et  $z_0$  appartiennent à la même sous-région.

**Lemme 5.1.2** *Supposons que  $f$  soit régulière sur et à l'intérieur d'un contour fermé simple  $\Gamma$ . Pour un  $\epsilon > 0$  donné, il est toujours possible de diviser  $\Gamma \cup \Gamma^\circ$  en un nombre fini de carrés et carrés partiels  $\Gamma_j$  (ces derniers sont limités par une partie d'un carré et un arc de  $\Gamma$ ) tels qu'il existe un point  $z_j$  à l'intérieur ou sur la frontière de chaque  $\Gamma_j$  pour lequel l'inégalité*

$$\left| \frac{f(z) - f(z_j)}{z - z_j} - f'(z_j) \right| < \epsilon, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (5.2)$$

*est satisfaite pour tout  $z \neq z_j$  de  $\Gamma_j \cup \Gamma_j^\circ$ .*

### Démonstration

Supposons que  $\Gamma \cup \Gamma^\circ$  soit recouvert par un réseau de carrés (tous de même grandeur) formés par deux familles de droites parallèles aux axes des  $x$  et des  $y$  respectivement. On enlève les parties des carrés qui se retrouvent à l'extérieur de  $\Gamma \cup \Gamma^\circ = \bigcup_1^n \Gamma_j$  où chaque  $\Gamma_j$  est soit un carré soit un carré partiel.

Or, donné  $\epsilon > 0$ , supposons qu'il existe  $\Gamma_j$  pour lequel il n'existe aucun point  $z_j$  qui satisfait l'inégalité 5.2 pour tout  $z \in \Gamma_j \cup \Gamma_j^\circ$ . Si  $\Gamma_j$  est un carré on le divise en quatre ou si  $\Gamma_j$  est un carré partiel on divise le carré qui l'a déterminé en quatre carrés égaux après quoi les points se retrouvant à l'extérieur de  $\Gamma \cup \Gamma^\circ$  sont éliminés. En répétant cette opération pour chaque  $\Gamma_j$  où l'inégalité 5.2 n'est pas satisfaite, il se peut que 5.2 soit satisfaite partout. Sinon, on considère les carrés et carrés partiels où ceci n'est pas le cas et on les divise encore en quatre comme ci-haut.

Il faut prouver qu'après un nombre fini de répétitions de cette opération, on arrive à une partition de  $\Gamma \cup \Gamma^\circ$  en carrés et carrés partiels de telle façon que 5.2 soit satisfaite pour chacun d'eux. Pour le prouver, supposons que  $\Omega_0$  représente un  $\Gamma_j$  de la partition initiale pour lequel le lemme n'est pas vrai. Divisant ce

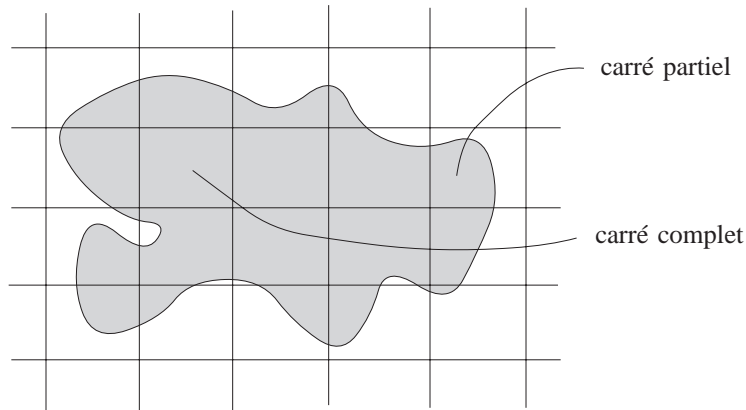


Figure 5.1:

carré (ou carré partiel) en quatre comme décrit ci-dessus, on obtient quatre carrés (ou carrés partiels). Il existe au moins une de ces quatre parties de  $\Omega_0$  pour laquelle le lemme n'est pas vrai. (Pourquoi?) Notons par  $\Omega_1$  une des parties de  $\Omega_0$  où le lemme n'est pas vrai. On voit que  $\Omega_1 \subseteq \Omega_0$  et, bien sûr,  $\Omega_0$  et  $\Omega_1$  sont des fermés de  $\mathbb{C}$ . De cette façon on construit une suite  $\{\Omega_k\}$  de fermés telle que

- 1)  $\forall \Omega_k$  le lemme n'est pas vrai
- 2) Chaque  $\Omega_k$  est un fermé et  $\Omega_{k+1} \subseteq \Omega_k$  pour  $k \geq 0$ ;
- 3)  $\sup_{z,w \in \Omega_k} |z - w| \rightarrow 0$  lorsque  $k \rightarrow \infty$ .

Le Lemme 5.1.1 implique qu'il existe un point  $z_0$  tel que  $z_0 \in \Omega_k$  pour  $k = 1, 2, \dots$  et que chaque voisinage  $V(z_0, \delta)$ ,  $\delta > 0$ , contient un des fermés  $\Omega_k$ , si  $k$  est suffisamment grand. Donc,  $z_0$  est un point d'adhérence de  $\Gamma \cup \Gamma^\circ$ . Donc, la condition (5.1) doit être satisfaite au point  $z_0$ . Mais, le voisinage  $V(z_0, \delta_0)$  de l'inégalité (5.1) contient  $\Omega_j$  si  $j$  est suffisamment grand. Choisissons  $z_0$  comme valeur de  $z_j$  dans 5.2. On voit que cette inégalité est alors satisfaite pour  $\Omega_j$  ce qui est une contradiction.

**C.Q.F.D.** ■

Maintenant, on prouvera que si  $\epsilon' > 0$  et si  $f$  et  $\Gamma$  satisfont les conditions de cette section, alors

$$\left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| < \epsilon'.$$

Pour une valeur  $\epsilon > 0$  soient  $\Gamma_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$  des carrés et carrés partiels choisis de telle sorte que le Lemme 5.1.2 s'applique. L'inégalité du Lemme 5.1.2 peut s'exprimer comme suit: Chacune des fonctions

$$\delta_j(z) = \frac{f(z) - f(z_j)}{z - z_j} - f'(z), \quad j \in [1, \dots, n]$$

satisfait l'inégalité

$$|\delta_j(z)| < \epsilon. \quad (5.3)$$

Pour chacune des fonctions  $\delta_j(z)$  on définit  $\delta_j(z_j) = 0$  puis il est clair que chaque  $\delta_j$  est continue sur  $\Gamma_j \cup \Gamma_j^\circ$ .

Soit  $z$  un point du contour  $\Gamma_j$ . La valeur de  $f(z)$  peut s'écrire comme

$$f(z) = f(z_j) - z_j f'(z_j) + f'(z_j)z + (z - z_j)\delta_j(z)$$

Or,

$$\int_{\Gamma_j} dz = 0 \quad , \quad \int_{\Gamma_j} z dz = 0. \quad (5.4)$$

(Voir les exercices et l'Exemple 5.1.1.) On déduit de ces formules que

$$\int_{\Gamma_j} f(z) dz = \int_{\Gamma_j} (z - z_j)\delta_j(z) dz.$$

Choisissons l'orientation positive pour chaque  $\Gamma_j$  et il s'ensuit que

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{j=1}^n \int_{\Gamma_j} f(z) dz. \quad (5.5)$$

Pour voir ceci on note que les parties de chaque  $\Gamma_j$  se trouvant à l'intérieur de  $\Gamma$  sont des cotés d'un carré. De plus,  $\int f(z) dz$  est évaluée exactement deux fois le long de chacun de ces cotés, une fois dans chaque direction, pour évaluer (5.5). Donc, la partie de la somme qui est due aux valeurs de ces intégrales est zéro. Donc, à cause de (5.5), on trouve que

$$\left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| \leq \sum_1^n \left| \int_{\Gamma_j} (z - z_j)\delta_j(z) dz \right| \leq \sum_1^n \int_{\Gamma_j} |z - z_j| |\delta_j(z)| |dz| < \epsilon \sum_1^n \int_{\Gamma_j} |z - z_j| |dz|.$$

Soit  $S_j$  la longueur de chaque coté du carré  $\Gamma_j$  (ou du carré qui a déterminé  $\Gamma_j$  si ce dernier est un carré partiel). Alors, si  $z \in \Gamma_j$ , on a  $|z - z_j| \leq S_j \sqrt{2}$  et

$$\int_{\Gamma_j} |z - z_j| |dz| \leq \sqrt{2} \int_{\Gamma_j} |dz|. \quad (5.6)$$

L'intégrale  $\int_{\Gamma} |dz|$  représentent la longueur de  $\Gamma_j$ . Si  $\Gamma_j$  est un carré alors cette valeur est  $4S_j$  autrement elle est plus petite ou égale à  $4S_j + L_j$  où  $L_j$  est la longueur de la partie de  $\Gamma$  qui sert à former  $\Gamma_j$ . Quand  $\Gamma_j$  est un carré, notons par  $A_j = S_j^2$ , l'aire de  $\Gamma_j$ . Alors

$$\int_{\Gamma_j} |z - z_j| |dz| \leq 4\sqrt{2}A_j.$$

Si  $\Gamma_j$  est un carré partiel on trouve que

$$\int_{\Gamma_j} |z - z_j| |dz| \leq S_j \sqrt{2} (4S_j + L_j). \quad (5.7)$$

Soit  $S$  la longueur de chaque coté d'un carré  $K$  lequel est choisi de telle sorte que  $\Gamma$  et tous les carrés et carrés partiels utilisés dans la partition de  $\Gamma \cup \Gamma^\circ$  se trouvent à l'intérieur de  $K$ . Alors, si  $\Gamma_j$  est un carré partiel

$$\int_{\Gamma_j} |z - z_j| |dz| < 4\sqrt{2}A_j + \sqrt{2}SL_j. \quad (5.8)$$

En conclusion, si  $L$  représente la longueur de  $\Gamma$ , on déduit que les inégalités 5.6, 5.7 et 5.8 que

$$\left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| < \epsilon [4\sqrt{2}S^2 + \sqrt{2}SL] = \epsilon'. \quad (5.9)$$

où on peut choisir  $\epsilon'$  aussi petit qu'on le désire. Comme  $\int_{\Gamma} f(z) dz$  est une constante, l'inégalité (5.9) implique que cette constante doit être zéro. Ceci complète la démonstration du théorème suivant.

**Théorème 5.1.1 (Cauchy-Goursat)** *Si  $f$  est régulière en chaque point  $z$  sur et à l'intérieur d'un contour fermé simple  $\Gamma$  alors  $\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$ .*

Dorénavant, on appelle ce résultat « **Théorème de Cauchy** ». E. Goursat fut le premier à publier une démonstration de ce théorème laquelle n'utilisait pas l'hypothèse de la continuité de la fonction dérivée  $f'$ . On verra dans la prochaine section que si on suppose que les parties réelles et imaginaires de  $f$  soient de classe  $C^1$  sur et à l'intérieur de  $\Gamma$ , le théorème de Green permet une démonstration assez simple de ce résultat.

Avant de continuer, considérons l'exemple suivant qui donne une première indication quant à l'importance du théorème de Cauchy.

**Exemple 5.1.2** *Soit  $f$  la fonction définie par  $f(z) = e^{-z^2}$  et  $\Gamma$  le contour fermé construit par la réunion des quatre segments  $[(-R, 0), (R, 0)]$ ,  $[(R, 0), (R, b)]$ ,  $[(R, b), (-R, b)]$  et  $[(-R, b), (-R, 0)]$  où  $R, b \in \mathbb{R}$  avec  $R > 0$  et  $b > 0$ . (Voir le Diagramme 5.1.) Il n'est pas difficile de démontrer que  $f$  est une fonction holomorphe dans  $\mathbb{C}$ . Le Théorème de Cauchy nous dit alors que*

$$\int_{\Gamma} e^{-z^2} dz = 0.$$

*Posons*

$$\Gamma_1 = \{z : z = x + 0i, -R \leq x \leq R\},$$

$$\Gamma_2 = \{z : z = R + yi, 0 \leq y \leq b\},$$

$$\Gamma_3 = \{z : z = x + ib, -R \leq x \leq R\},$$

$$\Gamma_4 = \{z : z = -R + iy, 0 \leq y \leq b\}.$$

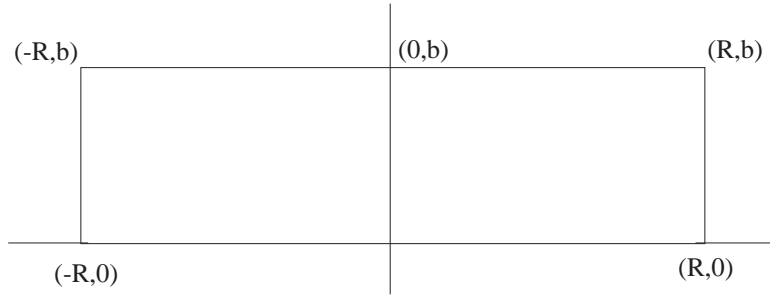


Figure 5.2:

On voit que  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$  où les orientations sont choisies de telle manière que l'orientation de  $\Gamma$  soit positive. Posons  $I_j = \int_{\Gamma_j} e^{-z^2} dz$  pour  $j = 1, 2, 3, 4$ . Alors,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-R}^R e^{-x^2} dx, & I_2 &= \int_0^b e^{-(R+iy)^2} dx, \\ I_3 &= \int_R^{-R} e^{-(x+ib)^2} dx, & I_4 &= \int_b^0 e^{-(-R+iy)^2} dx \end{aligned}$$

où  $I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0$ .

On note que

$$\begin{aligned} \left| e^{-(R+iy)^2} \right| &= \left| e^{-R^2} e^{y^2} e^{-2iRy} \right| \leq e^{b^2} e^{-R^2}, \\ \left| e^{-(-R+iy)^2} \right| &= \left| e^{-R^2} e^{y^2} e^{2iRy} \right| \leq e^{b^2} e^{-R^2}. \end{aligned}$$

Mais, vu que  $\lim_{R \rightarrow \infty} e^{-R^2} = 0$  les intégrales  $I_2$  et  $I_4$  ont des valeurs arbitrairement petites (en valeur absolue) lorsque  $R$  est suffisamment grand. Donc,  $I_2 + I_4 = \beta(R)$  où  $\beta(R) \rightarrow 0$  lorsque  $R \rightarrow \infty$ . Il s'ensuit que

$$0 = \int_{\Gamma} e^{-z^2} dz = I_1 + I_3 + \beta(R)$$

À la limite, lorsque  $R \rightarrow \infty$ , on trouve que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+ib)^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Donc, on déduit que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos 2bx dx = \sqrt{\pi} e^{-b^2}.$$

**Fin de l'exemple.**

**Exemple 5.1.3** Si  $C$  est le cercle unitaire, appliquer le Théorème de Cauchy pour la fonction  $1/(z+2)$  afin de déduire que

$$\int_0^\pi \frac{1 + 2 \cos \theta}{5 + 4 \cos \theta} d\theta = 0.$$

**Solution**

Vu que le point  $z = -2$  est à l'extérieur du cercle, le Théorème de Cauchy nous garantit que

$$\int_C \frac{dz}{z + 2} = 0.$$

Sur le cercle  $|z| = 1$  nous avons  $z = \cos \theta + i \sin \theta$ . Donc,

$$\int_{-\pi}^\pi \frac{(\cos \theta + i \sin \theta) i d\theta}{2 + \cos \theta + i \sin \theta} = \int_{-\pi}^\pi \frac{-2 \sin \theta + i[1 + 2 \cos \theta]}{5 + 4 \cos \theta} d\theta = 0.$$

Donc, en particulier, la partie imaginaire égale zéro ce qui veut dire

$$\int_{-\pi}^\pi \frac{1 + 2 \cos \theta}{5 + 4 \cos \theta} d\theta = 0.$$

Mais en utilisant la substitution  $\phi = -\theta$  on voit que

$$\int_{-\pi}^0 \frac{1 + 2 \cos \theta}{5 + 4 \cos \theta} d\theta = \int_\pi^0 \frac{1 + 2 \cos(-\phi)}{5 + 4 \cos(-\phi)} d(-\phi) = \int_0^\pi \frac{1 + 2 \cos \phi}{5 + 4 \cos \phi} d\phi$$

d'où la conclusion suit immédiatement.

Notons que pour ce problème l'intégration directe dans  $\mathbb{R}$  peut s'effectuer par le biais des substitutions trigonométriques. Le résultat est

$$\int \frac{1 + 2 \cos \theta}{5 + 4 \cos \theta} d\theta = \frac{\theta}{2} + \text{Arctan} \left( 3 \cot \frac{\theta}{2} \right)$$

et il est à vous la vérification que ceci tend vers 0 lorsque  $\theta \rightarrow \pi^-$ .

**Fin de l'exemple.**

On verra plus loin comment le Théorème de Cauchy peut être utilisé pour évaluer certaines intégrales réelles qui sont presque impossibles à évaluer si on se restreint au domaine réel.

## 5.2 LE THÉORÈME DE CAUCHY POUR UNE FONCTION POLYGÈNE.

Soit  $f$  une fonction polygène définie sur une région  $R$  simplement connexe, c'est-à-dire que la région  $R$  a la propriété que si  $\Gamma$  est un contour fermé simple dans  $R$  alors  $\Gamma^\circ \subseteq R$ . Le théorème suivant est une version complexe du Théorème de Green.

**Théorème 5.2.1** Soient  $f$  et  $g$  des fonctions polygènes sur une région simplement connexe  $R$ . Soit  $\Gamma$  un contour fermé simple contenu dans  $R$  et d'orientation positive. Alors,

$$\int_{\Gamma} f(z) dz + g(z) d\bar{z} = 2i \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial g}{\partial z} \right) dx dy$$

où  $\Omega = \Gamma \cup \Gamma^{\circ} \subseteq R$ .

**Démonstration**

Posons  $I = \int_{\Gamma} f(z) dz + g(z) d\bar{z}$ . Si  $f(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$  et  $g(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , on voit que

$$\begin{aligned} I &= \int_{\Gamma} (\phi + i\psi)(dx + i dy) + (u + iv)(dx - i dy) \\ &= \int_{\Gamma} (\phi + u) dx + (-\psi + v) dy + i \int_{\Gamma} (\psi + v) dx + (\phi - u) dy. \end{aligned}$$

On vérifie, sans trop de difficulté, que chacune de ces intégrales satisfait les hypothèses de Théorème de Green. Donc,

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\Omega} \left[ -\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \right] dx dy + i \iint_{\Omega} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} \right] dx dy \\ &= \iint_{\Omega} \left[ i \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} - i \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} \right] dx dy \\ &= i \iint_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) - \left( \frac{\partial g}{\partial x} - i \frac{\partial g}{\partial y} \right) \right] dx dy \\ &= 2i \iint_{\Omega} \left[ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial g}{\partial z} \right] dx dy \end{aligned}$$

**C.Q.F.D.** ■

**Exemple 5.2.1** Montrer que si  $f$  est régulière sur et à l'intérieur d'un contour fermé simple  $\Gamma$  alors

$$\int_{\Gamma} \overline{f(z)} f'(z) dz$$

est un nombre imaginaire pur.

**Solution**

La fonction  $f$  étant régulière entraîne que  $f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}$ . Donc, la version complexe du Théorème de Green nous donne

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} \overline{f(z)} \frac{\partial f(z)}{\partial z} dz &= 2i \iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( \overline{f(z)} \frac{\partial f(z)}{\partial z} \right) dx dy \\
&= 2i \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right) \left( \overline{\frac{\partial f}{\partial z}} \right) \\
&= 2i \iint_{\Omega} |f'(z)|^2 dx dy.
\end{aligned}$$

Mais cette dernière intégrale double a une valeur réelle.

**Fin de l'exemple.**

**Théorème 5.2.2** *Sous les hypothèses du Théorème 5.2.1, supposons que  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial g}{\partial z}$  sur  $R$ . Alors,*

$$\int_{z_0}^z f(w) dw + g(w) d\bar{w}$$

*ne dépend pas de la courbe  $\Gamma \subseteq R$  (toujours un arc régulier par morceaux orienté) le long de laquelle elle est évaluée.*

**Démonstration**

D'abord, il faut remarquer que lorsqu'on écrit une intégrale avec les bornes d'intégration sans indiquer le chemin le long duquel elle doit être évaluée qu'il est entendu que nous devons considérer l'intégrale comme étant une fonction dont le domaine est l'ensemble de tous les arcs réguliers par morceaux et orientés  $\Gamma$  qui relient les deux points ( $\Gamma \subseteq R$ ). Ce théorème nous donne des conditions sous lesquelles cette fonction de  $\Gamma$  soit identiquement constante.

Supposons que  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  soient des arcs orientés réguliers par morceaux reliant  $z_0$  et  $z$  tels que  $\Gamma_1 \cup (-\Gamma_2) = \Gamma$  soit un contour fermé simple. Alors,

$$\int_{\Gamma_1} f(w) dw + g(w) d\bar{w} + \int_{-\Gamma_2} f(w) dw + g(w) d\bar{w} = \int_{\Gamma} f(w) dw + g(w) d\bar{w} = 0$$

par le Théorème 5.2.1. Donc,

$$\int_{\Gamma_1} f(w) dw + g(w) d\bar{w} = \int_{\Gamma_2} f(w) dw + g(w) d\bar{w}.$$

Il est laissé en exercice à prouver que le résultat demeure vrai même si les deux arcs se recourent un nombre fini de fois.

**C.Q.F.D.** ■

**Théorème 5.2.3 (Cauchy)** *Sous les hypothèses du Théorème 5.2.1, supposons que  $f$  soit holomorphe sur  $R$  et que  $\Gamma$  soit un contour fermé simple. Alors,*

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0.$$

**Démonstration**

Dans le Théorème 5.2.1 on prend  $g(z) \equiv 0$ . Comme  $f$  est holomorphe sur  $R$ ,  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$  sur  $R$ .

**C.Q.F.D.** ■

Il est à noter que les hypothèses des théorèmes de cette section supposent que la fonction dérivée  $f'(x, \Gamma)$  soit continue. Mais nous avons déjà vu, dans la section 5.1, que cette hypothèse n'est pas nécessaire pour prouver le Théorème de Cauchy. Néanmoins, on verra plus tard, que le fait de demander qu'une fonction soit holomorphe implique qu'elle soit de classe  $C^\infty$ .

**Théorème 5.2.4** Soient  $f$  et  $g$  des fonctions polygènes sur une région simplement connexe  $R$ . Soit  $\Gamma$  un contour fermé simple dans  $R$ . Si  $z_0 \in \Gamma^\circ$ , posons  $\delta = \sup_{z \in \Gamma} |z - z_0|$ . Alors,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{1}{2i\Omega} \int_{\Gamma} f(z) dz + g(z) d\bar{z} = \frac{\partial f(z_0)}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial g(z_0)}{\partial z}$$

où  $\Omega$  est l'aire de la région limitée par  $\Gamma$ .

**Démonstration**

**NOTA:** Lorsque  $\delta \rightarrow 0^+$ , c'est la courbe  $\Gamma$  qui varie. C'est-à-dire que pour chaque valeur de  $\delta$  il s'agit d'avoir un contour  $\Gamma_\delta$  tel que  $z \in \Gamma_\delta^\circ$  et  $\delta = \sup_{z \in \Gamma_\delta} |z - z_0|$ . Évidemment, il existe une infinité de choix pour  $\Gamma_\delta$  lorsque  $\delta$  est spécifié et la limite indiquée doit exister peu importe le choix qui est fait pour chaque valeur de  $\delta$ .

Posons

$$A(x, y) + iB(x, y) = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial g}{\partial z}.$$

Par le Théorème de la moyenne pour les intégrales doubles, il existe deux points  $(x_1, y_1)$  et  $(x_2, y_2)$  à l'intérieur de  $\Gamma$  tels que

$$\frac{-i}{2} \int_{\Gamma} f(z) dz + g(z) d\bar{z} = \iint_{\Gamma \cup \Gamma^\circ} A dx dy + i \iint_{\Gamma \cup \Gamma^\circ} B dx dy = \Omega [A(x_1, y_1) + iB(x_2, y_2)].$$

Cependant,  $A, B$  sont des fonctions continues, donc, lorsque  $\delta \rightarrow 0^+$ ,  $A$  et  $B$  tendent vers  $A(x_0, y_0)$  et  $B(x_0, y_0)$  respectivement.

**C.Q.F.D.** ■

Le résultat suivant est une conséquence immédiate des Théorèmes 5.2.2 et 5.2.4.

**Théorème 5.2.5** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions polygènes sur une région simplement connexe  $R$ . Alors,

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(w) dw + g(w) d\bar{w}, \quad z, z_0 \in R$$

ne dépend pas de l'arc  $\Gamma$  le long duquel elle est évaluée si et seulement si

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial g}{\partial z}$$

pour tout  $z \in R$ .

**Corollaire 5.2.1 (Théorème de Morera)** Soit  $f$  une fonction polygène sur une région simplement connexe  $R$ . Alors, si pour tout choix de  $z$  et  $z_0$  dans  $R$ ,  $F(z) = \int_{z_0}^z f(w) dw$ , a une valeur indépendante du chemin d'intégration alors  $f$  est holomorphe sur  $R$ .

**Démonstration**

Poser  $g(z) \equiv 0$  dans le résultat précédent.

**C.Q.F.D.** ■

On verra plus loin que le Théorème de Morera peut être démontré en supposant seulement que  $f$  soit continue sur la région  $R$ .

L'inégalité dans le théorème suivant sera importante dans le prochain chapitre.

**Théorème 5.2.6** Supposons que  $f$  soit régulière en tout point d'un arc régulier  $\Gamma$  et que pour tout point  $z \in \Gamma$ ,  $|f(z)| \leq M < \infty$ . Alors, si  $L$  est la longueur d'arc de  $\Gamma$

$$\left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\Gamma} |f(z)| |dz| \leq ML.$$

**Démonstration**

Posons  $I = \int_{\Gamma} f(z) dz$ . Il existe un angle  $\theta$  tel que  $I = |I|e^{i\theta}$  d'où

$$|I| = \int_{\Gamma} e^{-i\theta} f(z) dz = \int_a^b e^{-i\theta} f(z(t)) \frac{dz(t)}{dt} dt = \int_a^b (U(t) + iV(t)) dt$$

où  $z(a)$  est le point initial de  $\Gamma$  et  $z(b)$  son point terminal.

Vu que  $|I|, U, V$  sont réels on doit avoir

$$|I| = \int_a^b U(t) dt \quad \text{et} \quad \int_a^b V(t) dt = 0.$$

Il résulte que  $|I| \leq \int_a^b |U(t)| dt$ . Mais

$$|U(t)| \leq \left| e^{-i\theta} f(z(t)) \frac{dz(t)}{dt} \right| = |f(z(t))| \left| \frac{dz(t)}{dt} \right|.$$

Donc,

$$|I| \leq \int_a^b |f(z(t))| \left| \frac{dz(t)}{dt} \right| dt = \int_{\Gamma} |f(z)| |dz| \leq M \int_{\Gamma} |dz| \leq ML.$$

**C.Q.F.D.** ■

**Exemple 5.2.2** Avec l'aide du Théorème 5.2.6 trouver une borne supérieure pour

$$\left| \int_C \frac{dz}{z-1} \right|$$

où  $C$  est le cercle défini par  $|z| = r$ ,  $1 < r < \infty$ .

### Solution

Sur le cercle on observe que

$$\left| \frac{1}{z-1} \right| = \frac{1}{\sqrt{(z-1)(\bar{z}-1)}} = \frac{1}{\sqrt{z\bar{z} - 2x + 1}} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2x + 1}}$$

où  $x$  varie dans l'intervalle  $[-r, r]$  de telle sorte que le maximum est atteint pour  $x = r$ . Donc, selon le Théorème 5.2.6

$$\left| \int_C \frac{dz}{z-1} \right| \leq ML = \frac{2\pi r}{r-1}.$$

Il est à noter que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{2\pi r}{r-1} = 2\pi$$

et il n'est pas une coïncidence que, comme on le verra plus loin, la valeur exacte de  $\int_C \frac{dz}{z-1}$  est  $2\pi i$ .

**Fin de l'exemple.**

## 5.3 RELATIONS AVEC LA PHYSIQUE.

Soit  $C$  un arc régulier par morceaux du plan complexe décrit par  $z = x + iy : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $[\alpha, \beta] \subseteq \mathbb{R}$ . (Dans cette section on suppose souvent que la fonction  $z(t)$  soit de classe  $C^2$  en certains points.) Alors, si  $t \in [\alpha, \beta]$ ,  $z(t)$  est un point sur  $C$ . Nous pouvons aussi imaginer que  $z(t)$  décrit l'extrémité d'un vecteur qui relie l'origine au point  $z(t)$ . Si on interprète le paramètre  $t$  comme représentant le temps on peut dire que  $z(t)$  est la position d'un point mobile sur  $C$  au temps  $t$ . Dans ce contexte la dérivée  $dz/dt$  représente la **vitesse**  $\vec{v}$  de déplacement d'un point sur la courbe et la deuxième dérivée  $d^2z/dt^2$  représente son **accélération**  $\vec{a}$ . Pour rendre l'interprétation plus « physique » on imagine que le point  $z(t)$  est la location d'un « point-masse » appelé **particule** qui se déplace sur  $C$ .<sup>1</sup>

Pour les vecteurs de  $\mathbb{C}$  nous pouvons définir un **produit scalaire** comme suit: Si  $z = x + iy$  et  $w = u + iv$  sont deux « vecteurs » leur produit scalaire est  $z \bullet w = |z||w| \cos \theta = \Re(\bar{z}w)$  où  $\theta$  est l'angle compris entre 0 et  $\pi$  que font  $z$  et  $w$ .

**Exemple 5.3.1** Une particule se promène sur le cercle  $C$  décrite par  $z = e^{2\pi it}$ ,  $t \in [0, 1)$ . Trouver les vecteurs de vitesse et d'accélération.

### Solution

La particule fera un tour complet du cercle  $C$  dans une seconde et au temps  $t$  sa position sera  $z(t)$  et le vecteur tangent construit à ce point est

<sup>1</sup>À moins d'avis au contraire, le système métrique est employé avec la seconde comme unité de temps. Les unités physiques ne seront écrites explicitement que dans les cas de force majeure.

$$\vec{v} = \frac{dz}{dt} = 2\pi i e^{2\pi i t} = 2\pi i z.$$

Notons que les vecteurs  $z$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux car  $\vec{v} \bullet z = 0$ . L'accélération  $\vec{a}$  est donnée par

$$\vec{a} = \frac{d^2z}{dt^2} = -4\pi e^{2\pi i t} = -4\pi z.$$

On voit que les vecteurs  $\vec{a}$  et  $z$  sont parallèles, mais qu'ils ont des directions opposées et  $\vec{a} \bullet \vec{v} = 0$ . De plus, les valeurs absolues des vecteurs  $\vec{v}$  et  $\vec{a}$  sont des constantes –  $|\vec{v}| = 2\pi$ ,  $|\vec{a}| = 4\pi$ . (Ceci n'est pas le cas en général.)

**Fin de l'exemple.**

**NOTA:** Pour alléger la notation on évitera, en autant que possible, l'utilisation des flèches pour dénoter les vecteurs. Par exemple, un nombre complexe  $z$  peut toujours être interprété comme le vecteur dont les composantes sont  $(x, y)$  si le contexte l'exige.

Si  $z$  représente un point de  $C$  où  $\dot{z} = \frac{dz}{dt}$  existe avec  $\dot{z} \neq 0$ , alors  $\dot{z}$  est un vecteur tangent de  $C$ . Si  $s$  représente la longueur d'arc de  $C$ , alors  $|z'| = \left|\frac{dz}{ds}\right| = 1$ . Le vecteur défini par  $iz'$  a aussi la longueur 1 et il est orthogonal à  $z'$ . Notons par  $\tau_1$  et  $\tau_2$  les deux vecteurs  $\tau_1 = \frac{dz}{ds}$  et  $\tau_2 = i\frac{dz}{ds}$ . Alors,

$$\frac{d\tau_1}{ds} = \frac{d^2z}{ds^2} = \alpha\tau_1 + \beta\tau_2.$$

Mais  $|\tau_1| = 1$  ce qui implique que

$$\tau_1 \bullet \frac{d\tau_1}{ds} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d\tau_1}{ds} = \beta\tau_2.$$

De façon semblable  $d\tau_2/ds = \alpha\tau_1$ .

Du fait que  $\tau_1 \bullet \tau_2 = 0$  on voit que  $\beta = -\alpha = \kappa$ . Cette valeur  $\kappa$  s'appelle la **courbure** de  $C$  au point  $z(t)$ . La courbure est une valeur réelle et elle s'exprime par la formule

$$\kappa = \Re\left(\bar{\tau}_2 \frac{d\tau_1}{ds}\right) = \Re(-i\bar{z}'z'') = \frac{dx}{ds} \frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds} \frac{d^2x}{ds^2}.$$

Nous avons, donc, les équations de Serret-Frenet

$$\frac{d\tau_1}{ds} = \kappa\tau_2 \quad \text{et} \quad \frac{d\tau_2}{ds} = -\kappa\tau_1. \quad (5.10)$$

Le vecteur de vitesse  $\vec{v}$  d'une particule qui traverse la courbe  $C$  est  $\vec{v} = \frac{dz}{dt} = v\tau_1$ , ( $v = \frac{ds}{dt}$ ) et son accélération est  $\vec{a} = \frac{d^2z}{dt^2}$ . Si  $a_t$  et  $a_n$  sont des composantes tangentielle et normale de  $\vec{a}$  on a

$$a_t = \vec{a} \bullet \tau_1 = \frac{dv}{dt} = v \frac{dv}{ds} \quad (5.11)$$

et

$$a_n = \vec{a} \bullet \tau_2 = \left( v \frac{d\tau_1}{dt} + \frac{dv}{dt} \tau_1 \right) \bullet \tau_2 = v^2 \frac{d\tau_1}{ds} = v^2 \kappa. \quad (5.12)$$

Soient  $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions définies dans une région  $\Omega$  du plan complexe lesquelles sont d'au moins classe  $C^2$  sur  $\Omega$ . À partir de  $\phi, \psi$  on forme la fonction polygène  $F = \phi + i\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ . Encore une fois il nous convient d'interpréter les valeurs  $\phi(x, y)$ ,  $\psi(x, y)$  comme les composantes d'un vecteur. L'ensemble de tous les vecteurs engendrés lorsque  $z$  varie sur  $\Omega$  s'appelle le **champ de force** associé à la fonction polygène  $F$ . (On fera l'abus de notation qui consiste à identifier la fonction  $F$  et le champ de force par le même nom.) Il est important de se rappeler que les champs de force considérés ici sont toujours « positionnels » dans le sens que  $F$  est déterminé uniquement par la donnée de  $x$  et de  $y$ .

Si  $C$  représente un arc régulier par morceaux complètement contenu dans  $\Omega$  on peut considérer le problème d'étudier ce qui se passe lorsqu'une particule est contrainte à se déplacer sur  $C$  en présence d'un champ de force  $F$ . Sur  $C$  le vecteur  $F$  prend la forme  $F_1 = \phi_1 + i\psi_1 : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$  où  $\phi_1 = \phi_1(t) = \phi[x(t), y(t)]$  et  $\psi_1 = \psi_1(t) = \psi[x(t), y(t)]$ . Afin de garder la particule sur  $C$  il faut, en général, combattre l'influence du champ de force. Si  $a, b$  sont des valeurs de  $t$  qui correspondent aux points  $A, B$  respectivement sur  $C$ , la quantité

$$T(C; a, b) = \int_a^b \phi(x, y) dx + \psi(x, y) dy = \int_a^b \left[ \phi_1 \frac{dx}{dt} + \psi_1 \frac{dy}{dt} \right] dt = \int_a^b F \bullet dz$$

s'appelle le **travail**  $T(C; a, b)$  associé au déplacement de la particule du point  $A$  au point  $B$  le long de l'arc  $C$ . On définit aussi la quantité

$$\mathcal{F}(C, a, b) = \int_a^b -\psi(x, y) dx + \phi(x, y) dy = \int_a^b \left[ -\psi_1 \frac{dx}{dt} + \phi_1 \frac{dy}{dt} \right] dt = \int_a^b (iF) \bullet dz.$$

qui s'appelle la **flux**  $\mathcal{F}(C, a, b)$  du trajet. (Il est à noter que  $T(C; a, b)$  et  $\mathcal{F}(C, a, b)$  représentent des fonctions dont le domaine est l'ensemble des arcs réguliers par morceaux qui relient les points  $A$  et  $B$  tout en restant dans la région  $\Omega$ .) En général, si  $A$  et  $B$  sont deux points de la région  $\Omega$  et si  $C$  et  $\Gamma$  sont des arcs qui les relient, le travail nécessaire pour déplacer une particule de  $A$  à  $B$  sera différent selon qu'on suit la courbe  $C$  ou la courbe  $\Gamma$ . (Le même remarque s'applique quant au calcul de  $\mathcal{F}(C, a, b)$ ).

Supposons que  $T_1$  et  $N_1$  représentent les composantes tangentielle et normale du vecteur de force  $F$ . Alors,

$$T_1 = F \bullet \tau_1 = \Re \left( \bar{F} \frac{dz}{ds} \right) = \phi \frac{dx}{ds} + \psi \frac{dy}{ds} \quad (5.13)$$

et

$$N_1 = F \bullet \tau_2 = \Re \left( i \bar{F} \frac{dz}{ds} \right) = \psi \frac{dx}{ds} - \phi \frac{dy}{ds}. \quad (5.14)$$

Soient  $T_2$  et  $N_2$  les composantes tangentielle et normale de la dérivée  $dF/ds$ . On voit facilement que

$$T_2 = \frac{dF}{ds} \bullet \tau_1 = \Re((\phi' - i\psi')(x' + iy')) = \phi'x' + \psi'y' \quad (5.15)$$

et

$$N_2 = \frac{dF}{ds} \bullet \tau_2 = \Re(i(\phi' - i\psi')(x' + iy')) = \psi'x' - \phi'y'. \quad (5.16)$$

Les relations entre  $T_1, T_2, N_1$  et  $N_2$  sont

$$\frac{dT_1}{ds} = T_2 + \kappa N_1 \quad \text{et} \quad \frac{dN_1}{ds} = N_2 - \kappa T_1.$$

Si une particule de masse  $m > 0$  est contrainte à se déplacer sur un arc admissible  $C$  la physique élémentaire nous enseigne que

$$m \frac{dv}{dt} = mv \frac{dv}{ds} = T_1 = \phi \frac{dx}{ds} + \psi \frac{dy}{ds} = F \bullet \tau_1$$

d'où

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \int_{s_0}^s T_1 ds = T(C, z_0, z), \quad (z_0, z \in C).$$

La quantité  $mv^2/2$  s'appelle l'**énergie cinétique**.

Si  $C$  est un contour simple fermé complètement contenu dans la région de définition du champ de force on note par  $T(F, C)$  le travail accompli en faisant un tour complet de  $C$  et par  $\mathcal{F}(F, C)$  le flux pour le même trajet. Posons

$$I(F, C) = T(F, C) + i\mathcal{F}(F, C) = \int_C \bar{F} dz.$$

Or, si  $z$  est un point fixe à l'intérieur de  $C$  et si  $\Lambda$  est l'aire délimitée par  $C$  on trouve que

$$\lim_{C \rightarrow 0} \frac{1}{\Lambda} \int_C \bar{F} dz = 2i \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{z}}$$

Ici, par  $C \rightarrow 0$  on veut dire que la courbe  $C$  se contracte de façon continue au point  $z$ .

Une **ligne de force**  $C$  est une courbe dont le vecteur tangent à chacun de ses points est parallèle au vecteur de force  $\phi + i\psi$  correspondant. Les lignes de force satisfont l'équation différentielle

$$-\psi(x, y) dx + \phi(x, y) dy = 0$$

où ce qui est équivalent,  $N_1 = F \bullet \tau_2 = 0$ . Donc, correspondant à un champ de force (positionnel) il y a  $\infty^1$  lignes de force.

À partir d'ici on suppose que la région de définition du champ de force soit simplement connexe.

Un champ de force défini sur une région  $\Omega$  est dit **conservateur** si et seulement si le travail  $T(C, a, b)$  nécessaire pour déplacer une particule entre deux points quelconques de  $\Omega$  soit indépendant de l'arc utilisé pour les relier. (Les arcs doivent, bien sûr, être contenus dans  $\Omega$ .) Pour un champ de force conservateur il existe une fonction  $V$  appelée la **potentielle** telle que

$$\phi = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad \text{et} \quad \psi = -\frac{\partial V}{\partial y}.$$

Si le flux  $\mathcal{F}(C, a, b)$  a toujours une valeur qui ne dépend pas de  $C$  on dit que le champ de force est **solénoïdal**. Dans ce cas il existe une fonction  $W$  appelée **fonction de flux** telle que

$$\phi = -\frac{\partial W}{\partial y} \quad \text{et} \quad \psi = \frac{\partial W}{\partial x}.$$

Une courbe  $C$  dans la région de définition d'un champ de force solénoïdal est une ligne de force si et seulement si  $W$  ne varie pas sur  $C$ . En fait les  $\infty^1$  lignes de force sont définies par  $W(x, y) = \text{constante}$ .

Un champ de force qui est à la fois conservateur et solénoïdal est dit **laplacien**. Notons qu'un **champ de force est laplacien si et seulement s'il existe une potentielle  $V$  et une fonction de flux  $W$  telles que  $V + iW$  soit une fonction holomorphe**.

Soient  $C$  et  $\Omega$  des arcs réguliers par morceaux qui relient les points  $A, B$  de  $\Omega$ . On suppose que  $C$  et  $\Omega$  ne se recoupent qu'un nombre fini de fois et on forme le contour fermé  $\Lambda = C \cup \Gamma^-$ . D'après la version complexe du Théorème de Green

$$\int_{\Lambda} F \bullet dz = i \iint_{\Lambda^\circ} \left( \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial F}{\partial z} \right) dx dy. \quad (5.17)$$

De ceci on déduit le résultat suivant.

**Théorème 5.3.1** *Un champ de force défini par une fonction polygène  $F$  sur une région  $\Omega$  est conservateur si et seulement si les centres de tous les cercles de Kasner associés à la dérivée polygène de  $F$  sont sur l'axe réel.*

#### Démonstration

La dérivée polygène de  $F$  s'exprime par

$$F'(z, C) = \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} e^{-2i\theta}$$

et, pour chaque  $z$  le cercle de Kasner est centré au point déterminé par  $\frac{\partial F}{\partial \bar{z}}$  et cette quantité sera toujours réelle si et seulement si  $\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x}$  en tout point de la région. Le résultat suit maintenant du Théorème de Green et de la définition d'un champ de force conservateur.

**C.Q.F.D.** ■

**Théorème 5.3.2** *Un champ de force défini par une fonction polygène  $F$  sur une région  $\Omega$  est solénoïdal si et seulement si les centres des cercles de Kasner correspondant à la dérivée polygène de la fonction  $F$  sont toujours sur l'axe imaginaire.*

#### Démonstration

Sous les hypothèses de ce théorème on voit que

$$\mathcal{F}(F, C) = \int_C (iF) \bullet d\bar{z} = \iint_{\Lambda} \left( \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{z}} \right) dx dy$$

d'où il suit immédiatement que  $\frac{\partial F}{\partial \bar{z}}$  doit être un nombre imaginaire pur.

**C.Q.F.D.** ■

Des deux résultats précédents on déduit facilement la caractérisation des champs de force laplacien.

**Théorème 5.3.3** *Un champ de force défini par une fonction polygène  $F$  est laplacien si et seulement tous les cercles de Kasner associés à sa dérivée polygène sont centrés à l'origine. Ceci veut dire que  $F$  est anti-holomorphe (c'est-à-dire holomorphe dans la variable  $\bar{z}$ ).*

Les opérateurs  $\nabla$  et  $\bar{\nabla}$  se définissent par

$$\nabla = 2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \quad , \quad \bar{\nabla} = 2 \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} .$$

En fonction de ces opérateurs on peut définir certaines opérations élémentaires de la physique.

Le **gradient** d'une fonction  $G$  se définit comme

$$\text{grad } G = \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) G = 2 \frac{\partial G}{\partial \bar{z}} = \nabla G .$$

Si  $C$  est la courbe définie par  $G(z) = \text{constante}$  on remarque que  $\nabla G$  est un vecteur normal à  $C$  car le vecteur tangent à  $C$  est  $G_T = \frac{\partial G}{\partial y} - i \frac{\partial G}{\partial x}$  et

$$G_T \bullet \nabla G = \Re(G_T \nabla G) = 0 .$$

Si  $F = \phi + i\psi$  est un champ de force conservateur et si chacune des fonctions réelles  $\phi, \psi$  est d'au moins classe  $C^2$  on peut prouver qu'il existe une fonction  $V(x, y)$ , appelée **le potentiel**, telle que  $dV = F \bullet dz$ . Dans cette situation une courbe définie implicitement par  $V(x, y) = \text{constante}$  s'appelle **courbe d'équipotentielle**. Il est clair qu'une particule qui se déplace sur une telle courbe ne fait aucun travail. Le gradient de  $V$  est un vecteur normal à la courbe  $V(x, y) = \text{constante}$ .

**Exemple 5.3.2** *Examiner le champ de force centrale défini par la fonction  $F = x + iy$ .*

**Solution**

Ici  $F = z$  donc  $\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} \equiv 0$  impliquant que le champ de force est conservateur. On voit facilement que la fonction  $\frac{1}{2}(x^2 + y^2)$  est le potentiel. Donc les courbes équipotentielles sont les cercles centrés à l'origine. Les vecteurs définis par  $\nabla V$  sont parallèles aux vecteurs du champ de force et orthogonaux aux courbes d'équipotentielle.

**Fin de l'exemple.**

Remarquons que si le champ de force n'est pas conservateur le potentiel n'est pas défini. La **rotationnel** d'un champ de force  $F$  est

$$\operatorname{rot} F = \Im(\bar{\nabla} F) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2\Im\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right).$$

Un champ de force conservateur est caractérisé par le fait que  $\operatorname{rot} F \equiv 0$  sur sa région de définition. La **divergence** d'un champ de force  $F$  se définit par

$$\operatorname{div} F = \nabla \bullet F = \Re(\bar{\nabla} F) = 2\Re\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right).$$

Un champ de force solénoïdal est caractérisé par le fait que  $\operatorname{rot} F \equiv 0$  sur sa région de définition.

**Exemple 5.3.3** Soit  $F = \phi + i\psi$  un champ de force défini dans une région  $R$  et soit  $\Gamma$  un contour fermé simple contenu dans  $R$ . Si on imagine que  $F$  décrit le flux d'une fluide sur la région alors  $\int_{\Gamma} F \bullet dz = \int_{\Gamma} F \bullet \frac{dz}{ds} ds$ , appelé la **circulation** est la quantité totale de flux lorsqu'on fait un tour de  $\Gamma$ . Le rotationnel mesure les tendances de rotation du flux au point  $z$ . La version complexe du Théorème de Green implique que la circulation peut s'exprimer par la formule

$$\int_{\Gamma} F \bullet dz = \iint_{\Omega} \operatorname{rot} F \, dx \, dy$$

où  $\Omega$  est la région délimitée par  $\Gamma$ .

Le **Laplacien** est un opérateur définit par

$$\nabla \bullet \nabla = \nabla^2 = \Re(\nabla \bar{\nabla}) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}.$$

Une fonction  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  qui est de classe  $C^2$  et qui satisfait  $\nabla^2 F \equiv 0$  sur  $\Omega$  est dite **harmonique**. (On étudiera les fonctions harmoniques en détail plus loin.)

Si  $C$  est un contour fermé simple, soit  $\eta$  le vecteur unitaire de la normale orientée vers l'extérieur de  $C$ . Si  $s$  représente la longueur d'arc de  $C$  et si  $F$  est d'au moins de classe  $C^1$  sur une région contenant  $C$ , on définit la **dérivée normale** comme

$$\frac{\partial F}{\partial \eta} = (\operatorname{grad} F) \bullet \eta \quad , \quad \eta = -\tau_2 = \frac{dy}{ds} - i \frac{dx}{ds}.$$

Donc,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \eta} &= \left(2 \frac{\partial F}{\partial \bar{z}}\right) \bullet \eta = \Re \left[ \left( \frac{\partial F}{\partial x} - i \frac{\partial F}{\partial y} \right) \left( \frac{dy}{ds} - i \frac{dx}{ds} \right) \right] \\ &= \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right) \frac{dy}{ds} - \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right) \frac{dx}{ds} \\ &= -i \left[ \left( \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} \right) \frac{dz}{ds} - \left( \frac{\partial F}{\partial z} \right) \frac{d\bar{z}}{ds} \right]. \end{aligned}$$

**Exemple 5.3.4** Supposons que  $F$  soit de classe  $C^1$  et que  $G$  soit de classe  $C^2$  sur et à l'intérieur d'un contour fermé simple  $C$ . Démontrer la **première identité de Green**

$$\int_C F \frac{\partial G}{\partial \eta} ds = \iint_{\Omega} F \nabla^2 G dx dy + \iint_{\Omega} \left[ \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial G}{\partial y} \right] dx dy$$

où

$$\iint_{\Omega} F \nabla^2 G dx dy = \int_C F \frac{\partial G}{\partial \eta} ds - \iint_{\Omega} \nabla F \bullet \nabla G dx dy.$$

### Solution

Par une application de la version complexe du Théorème de Green on voit que

$$\begin{aligned} \int_C F \left( \frac{\partial G}{\partial \eta} \right) ds &= i \int_C F \left( \frac{\partial G}{\partial \bar{z}} \right) dz - F \left( \frac{\partial G}{\partial z} \right) d\bar{z} \\ &= \iint_{\Omega} \left[ 4F \frac{\partial^2 G}{\partial z \partial \bar{z}} + 2 \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} \frac{\partial G}{\partial z} + 2 \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial G}{\partial \bar{z}} \right] dx dy \\ &= \iint_{\Omega} \left[ F \nabla^2 G + \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial G}{\partial y} \right] dx dy. \end{aligned} \quad (5.18)$$

### Fin de l'exemple.

L'équation 5.18 peut être considérée comme une généralisation de la formule d'intégration par parties pour les intégrales doubles.

Comme conséquence immédiate on peut aussi déduire la **deuxième identité de Green** en supposant que  $F$  soit aussi de classe  $C^2$ .

$$\int_C \left[ F \frac{\partial G}{\partial \eta} - G \frac{\partial F}{\partial \eta} \right] ds = \iint_{\Omega} \left[ F \nabla^2 G - G \nabla^2 F \right] dx dy.$$

Si on pose  $F \equiv 1$  dans la première identité de Green on obtient

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial G}{\partial \eta} ds = \iint_{\Omega} \nabla^2 G dx dy.$$

La dérivée normale  $\frac{\partial G}{\partial \eta}$  mesure la vitesse de modification de  $G$  au travers de la frontière de  $\Gamma$  à un point fixe. L'intégration sur  $\Gamma$  au complet mesure le changement total de  $G$  par rapport à  $\Gamma$ . Donc, il est possible de déterminer le changement total soit en faisant une intégrale de ligne sur  $\Gamma$  soit en évaluant une intégrale double sur les points de l'intérieur de  $\Gamma$ .

La **pression**  $P$  le long le vecteur normal principal d'une courbe  $C$  qui est dans la région de définition d'un champ de force  $F$  se définit comme

$$P = \frac{mv^2}{r} - N_1 \quad \text{où} \quad r = \frac{1}{\kappa}.$$

Il est clair que

$$P = \frac{2}{r} \int_{s_0}^s T_1 ds - N_1 + \frac{mv_0^2}{r}.$$

Un **système physique**  $S_k$  se compose des courbes obtenues par l'influence d'un champ de force  $F$  le long desquelles un déplacement contraint est possible tel que la pression dirigée dans la direction de la composante normale du vecteur de force soit proportionnelle à la coefficient de cette composante. Donc, si on dénote par  $\mathcal{P}$  la pression,  $\mathcal{P} = kN_1$ , ( $k \neq -1, \infty$ ).

On peut démontrer les faits suivants concernant les cas spéciaux (voir les cours de physique) où on suppose que les fonctions dérivées ici soient d'au moins classe  $C^3$  :

**a)** Si  $k = 0$  le système  $S_0$  se compose des  $\infty^3$  trajectoires dynamiques  $C$ , à savoir les courbes engendrées uniquement par l'influence du champ de force. (Par exemple, dans le système gravitationnelle ce sont des paraboles.)

**b)** Pour  $k = 1$  on obtient le système  $S_1$  de caténaire. Ce sont les courbes qui résultent d'un équilibre lorsqu'une ficelle homogène et extensible est suspendue dans le champ de force  $-F$ .

**c)** Pour  $k = -2$  on obtient la famille des brachistochrones. Dans le cas d'un champ de force conservateur  $S_{-2}$  se compose des courbes le long desquelles le temps d'un déplacement contraint est minimal.

**d)** Lorsque  $k \rightarrow \infty$  on obtient le cas limite qui se compose des trajectoires de vitesse. Une courbe  $C \in S_\infty$  s'il existe une vitesse  $v_0$  telle qu'une particule partant dans la direction du tangent de  $C$  avec la vitesse  $v_0$  suit une trajectoire dynamique de  $F$  lequel a la même courbure que  $C$  au point de départ.

**Théorème 5.3.4** *L'équation différentielle d'un système physique  $S_k$  du plan complexe est*

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = (1+k)F - \frac{kF \bullet \frac{dz}{dt}}{\left| \frac{dz}{dt} \right|} \frac{dz}{dt}.$$

### Démonstration

Nous savons qu'en fonction des composantes tangentielles et normales de l'accélération

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = ma_t \tau_1 + ma_n \tau_2 = ma_t \tau_1 + ma_n r \frac{d\tau_2}{ds}$$

et d'après les équations 5.11 et 5.12

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = mv \frac{dv}{ds} \tau_1 + mv^2 \kappa r \frac{d\tau_1}{ds} = T_1 \frac{dz}{ds} + (1+k) N_1 r \frac{d^2 z}{ds^2}.$$

Or,

$$T_1 \frac{dz}{ds} + r N_1 \frac{d^2 z}{ds^2} = F$$

d'où on déduit que

$$\begin{aligned}
m \frac{d^2 z}{dt^2} &= T_1 \frac{dz}{ds} + (1+k) \left[ F - T_1 \frac{dz}{ds} \right] \\
&= (1+k) F - k T_1 \frac{dz}{ds} \\
&= (1+k) F - \frac{k F \bullet \frac{dz}{dt}}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2} \frac{dz}{dt}
\end{aligned}$$

d'où le résultat suit immédiatement.

**C.Q.F.D.** ■

De l'équation  $mv^2 = (1+k)rN_1$  on déduit, après une dérivation par rapport à la longueur d'arc, que

$$\frac{d}{ds}(rN_1) = \frac{2}{1+k} T_1.$$

La substitution des équations 5.15 dans cette équation nous permet d'obtenir le

**Théorème 5.3.5** *L'équation différentielle intrinsèque d'un système physique  $S_k$  est*

$$N_1 \frac{dr}{ds} = rN_2 + \left( \frac{3+k}{1+k} \right) T_1.$$

Soit  $S_\infty$  un système de vitesse. Si  $C$  est une courbe de  $S_\infty$  associée à une vitesse constante  $v_0 > 0$  on a

$$rN_1 = mv_0^2, \quad m \frac{dv}{dt} = mv \frac{dv}{ds} = T_1, \quad \frac{mv^2}{r} = \frac{v^2}{v_0^2} N_1.$$

Donc,

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = T_1 \frac{dz}{ds} + \frac{v^2}{v_0^2} r N_1 \frac{d^2 z}{ds^2}.$$

Les détails du théorème suivant sont laissés en exercice.

**Théorème 5.3.6** *L'équation différentielle paramétrique d'un système physique  $S_\infty$  est*

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{1}{v_0^2} \left| \frac{dz}{dt} \right|^2 F + \left( \frac{1}{\left| \frac{dz}{dt} \right|^2} - \frac{1}{v_0^2} \right) \left( F \bullet \frac{dz}{dt} \right) \frac{dz}{dt}$$

et, vu que  $\frac{d}{ds}(rN_1) = 0$ , son équation différentielle intrinsèque est

$$N_1 \frac{dr}{ds} = -rN_2 + T_1.$$

Toute solution de l'équation différentielle paramétrique d'un système  $S_k$  ( $k \neq -1$ ) s'appelle **trajectoire actuelle** du système. Si on remplace le champ de force  $F$  par  $-F$  dans l'équation différentielle les solutions s'appellent **trajectoires virtuelles**. Normalement on considère le **système physique complet**  $S_k$  qui se compose des trajectoires actuelles et virtuelles.

## 5.4 SUR LA CONNEXITÉ DES RÉGIONS.

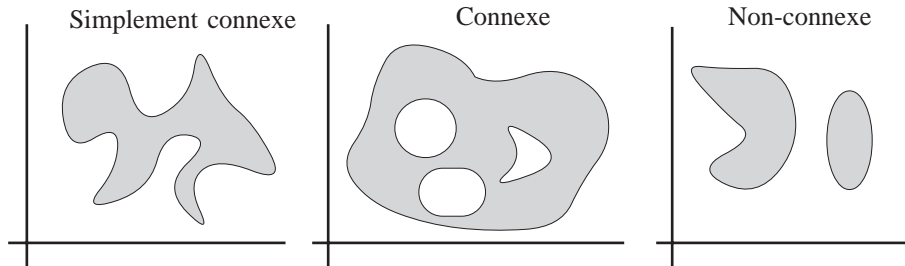


Figure 5.3:

On sait qu'une région  $R$  du plan complexe est dite **simplement connexe** si chaque contour fermé simple  $\Gamma$  de  $R$  a la propriété que  $\Gamma^\circ \subseteq R$ . Par exemple, si  $\Gamma$  est un contour fermé simple alors  $\Gamma^\circ$  est une région simplement connexe mais, par contre, l'extérieur de  $\Gamma$  n'a pas cette propriété. Si  $f$  est une fonction régulière en tout point sur et à l'intérieur d'un contour fermé simple  $\Gamma$  on peut prouver qu'il existe une région simplement connexe  $R$  telle que  $\Gamma \subseteq R$  et  $f$  est holomorphe sur  $R$ . Donc, le Théorème de Cauchy peut être formulé comme suit: **Si  $f$  est holomorphe sur une région simplement connexe  $R$  alors  $\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$  pour tout contour fermé simple de  $R$ .**

Il est à noter que le Théorème de Cauchy demeure valide même si le contour fermé se recoupe plusieurs fois car, dans ce cas, il peut être décomposé en une réunion de contours fermés simples sur lesquels les hypothèses du théorème sont satisfaites. Même si le contour fermé contient un ou plusieurs arcs qui sont traversés deux fois dans des directions opposées, le théorème reste vrai parce que les intégrales le long de ces arcs s'annulent.

Supposons que  $\Gamma$  et  $\Gamma_1$  soient des contours fermés simples tels que  $\Gamma_1 \subseteq \Gamma^\circ$  et soit  $f$  une fonction régulière sur  $\Gamma$  et  $\Gamma_1$  et dans la région définie par  $S = \Gamma^\circ \cap \text{ext}(\Gamma_1)$ . Il est clair que  $S$  n'est pas simplement connexe. Néanmoins, il est possible de choisir un point  $A$  sur  $\Gamma_1$  et un point  $B$  sur  $\Gamma$  de telle sorte que le segment  $[A, B] \subseteq S$ . De plus, la région  $S - (A, B)$  est simplement connexe. Définissons le contour fermé (orienté)  $\Gamma^*$  comme

$$\Gamma^* = \Gamma^+ \cup [A, B] \cup \Gamma_1^- \cup [B, A].$$

On considère que la région  $S - (A, B)$  est l'intérieur de  $\Gamma^*$ . Il est évident que

$$\int_{\Gamma^*} f(z) dz = \int_{\Gamma^+} f(z) dz + \int_{\Gamma_1^+} f(z) dz.$$

Supposons que  $\Gamma'$  soit un contour fermé construit à l'intérieur de  $\Gamma^+$  de telle sorte que pour chaque point  $z \in \Gamma^+$ ,  $\sup_{w \in \Gamma'} |z - w| = \epsilon > 0$ . Il est possible de choisir  $\epsilon$  si petit que  $\Gamma'$  soit un contour fermé simple. (Une démonstration rigoureuse de ce fait présente certaines complications donc on l'acceptera sur une base intuitive.) Or,  $\Gamma'$  étant un contour fermé simple, il s'ensuit que

$\int_{\Gamma'} f(z) dz = 0$ . Mais, lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ ,  $\Gamma' \rightarrow \Gamma^*$  d'où  $\int_{\Gamma^*} f(z) dz$ . Donc,

$$\int_{\Gamma^+} f(z) dz = \int_{\Gamma_1^+} f(z) dz.$$

**Théorème 5.4.1** Soient  $\Gamma$  et  $\Gamma_1$  deux contours fermés simples tels que  $\Gamma_1 \subseteq \Gamma^\circ$ . Si  $f$  est régulière sur  $\Gamma$  et  $\Gamma_1$  et aussi dans la région définie par  $\Gamma^\circ \cap \text{ext}(\Gamma_1)$  alors

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma_1} f(z) dz.$$

Une région bornée  $\Omega$  du plan est dite  **$n$ -connexe** si sa frontière consiste en  $n$  contours fermés simples  $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_{n-1}$  tels que si  $n > 1$

1. Pour  $k = 1, 2, \dots, n-1$   $\Gamma_k \subseteq \Gamma^\circ$ .
2. Pour  $j, k = 1, 2, \dots, n-1$ ,  $j \neq k$ ,  $\Gamma_j \cap \Gamma_k = \emptyset$ .
3. Pour  $j, k = 1, 2, \dots, n-1$ ,  $j \neq k$ ,  $\Gamma_j^\circ \cap \Gamma_k^\circ = \emptyset$ .

Dans le contexte de cette définition on convient qu'un point isolé est un contour fermé simple dégénéré. Une région qui est 1-connexe est simplement connexe. (Par exemple, l'intérieur d'un cercle.) La région entre deux cercles concentriques est 2-connexe. La région qui consiste de l'intérieur d'un cercle avec un point enlevé est 2-connexe etc.

En général, le Théorème de Cauchy n'est pas valide pour une région  $n$ -connexe.

**Exemple 5.4.1** Considérons  $f(z) = 1/z$  sur la région 2-connexe  $\{z : 0 < r < |z| < R < \infty\}$ . On sait que si  $r < s < R$

$$\int_{|z|=s} \frac{dz}{z} = 2\pi i \neq 0.$$

Si  $\Omega$  est  $n$ -connexe ( $n \geq 2$ ) il est possible d'enlever les points de  $n-1$  arcs contenus dans  $\Omega$  de façon que la région qui reste soit simplement connexe. Par exemple, la Figure 5.4 donne une illustration pour une région 3-connexe.

Utilisant le même argument qui nous a amené au Théorème 5.4.1, on peut prouver le résultat suivant.

**Théorème 5.4.2** Soient  $f, g$  des fonctions polygènes définies sur une région  $n$ -connexe  $\Omega$  et sur sa frontière laquelle consiste des contours  $\Gamma, \Gamma_1, \dots, \Gamma_{n-1}$ , tous d'orientation positive et satisfaisante les trois propriétés énoncées ci-haut. Alors,

$$\int_{\Gamma} f dz + g d\bar{z} - \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\Gamma_k} f dz + g d\bar{z} = 2i \iint_{\Omega} \left[ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial g}{\partial z} \right] dx dy.$$

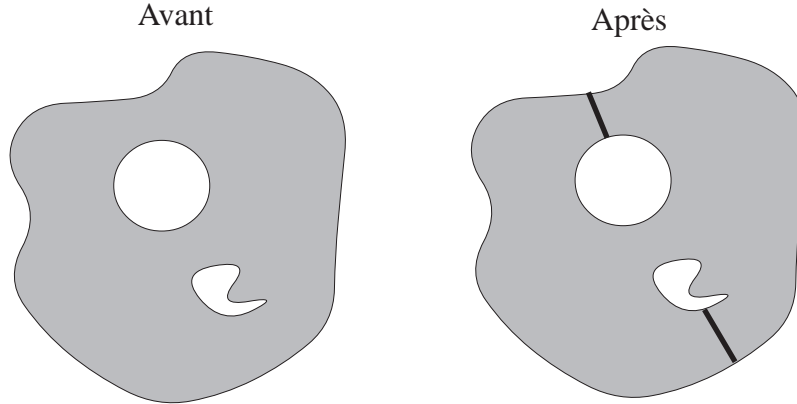


Figure 5.4: Région 3-connexe rendue simplement connexe par deux coupures.

**Corollaire 5.4.1** Si  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial g}{\partial z}$  sur  $\Omega$  et sur sa frontière alors

$$\int_{\Gamma} f dz + g d\bar{z} = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\Gamma_k} f dz + g d\bar{z}.$$

**Corollaire 5.4.2** Si  $f$  est régulière sur  $\Omega$  et sa frontière alors

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\Gamma_k} f(z) dz.$$

Ce dernier résultat est une extension directe du Théorème de Cauchy aux régions  $n$ -connexe ( $n \geq 2$ ).

Supposons que  $z, z_0$  soient des points d'une région simplement connexe  $\Omega$  et que  $f$  soit holomorphe sur  $\Omega$ . Si  $\Gamma$  et  $\Lambda$  sont des arcs réguliers par morceaux dans  $\Omega$ , lesquels relient  $z$  et  $z_0$  et qui n'ont qu'un nombre fini de points d'intersection. Alors, si  $\Gamma$  et  $\Lambda$  ont la même orientation

$$0 = \int_{\Gamma} f(w) dw - \int_{\Lambda} f(w) dw$$

ce qui indique que la valeur de l'intégrale de  $f$  entre  $z$  et  $z_0$  ne dépend pas de l'arc qui relie ces deux points.

Or, si  $z \in \Omega$  il va de même pour  $z + \Delta z$  si  $|\Delta z|$  est assez petit (car  $\Omega$  est un ouvert). Définissons la fonction  $F$  comme

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(w) dw.$$

Alors,

$$F(z + \Delta z) - F(z) = \int_z^{z+\Delta z} f(w) dw$$

où on peut choisir comme contour d'intégration le segment qui relie  $z$  et  $z + \Delta z$ . Or,

$$\frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) = \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} [f(w) - f(z)] dw.$$

Mais,  $f$  est continue au point  $z$ . Donc, pour tout  $\epsilon > 0$  il existe  $\delta > 0$  tel que  $|f(w) - f(z)| < \epsilon$  lorsque  $|z - w| < \delta$  ou, en particulier, lorsque  $|\Delta z| < \delta$ . Il s'ensuit que

$$\left| \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \right| < \frac{\epsilon}{|\Delta z|} \int_z^{z+\Delta z} |dw| = \epsilon$$

ce qui veut dire que

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} = F'(z) = f(z)$$

On a donc prouvé que **l'intégrale d'une fonction holomorphe est une fonction holomorphe** à condition qu'on se restreigne à une région simplement connexe où la fonction initiale est holomorphe.

Dans notre discussion nous avons utilisé le Théorème de Cauchy pour avoir l'assurance que l'intégrale de  $f$  possède une valeur indépendante du chemin d'intégration. Si on suppose seulement que la fonction  $f$  soit continue le même raisonnement démontre le résultat suivant.

**Théorème 5.4.3** *Si  $f$  est continue dans une région simplement connexe  $\Omega$  et si*

$$F(z) = \int_z^{z+\Delta z} f(w) dw \quad (z, z + \Delta z \in \Omega)$$

*a une valeur qui ne dépend pas de l'arc régulier par morceaux qui relie  $z$  et  $z + \Delta z$  alors  $F$  est holomorphe dans  $\Omega$  et  $F'(z) = f(z)$ .*

**Théorème 5.4.4 (Morera)** *Si  $f$  est continue sur une région  $\Omega$  supposons que  $\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$  pour tout contour fermé simple  $\Gamma$  de  $\Omega$  avec  $\Gamma^\circ \subseteq \Omega$ . Alors  $f$  est holomorphe sur  $\Omega$ .*

Ceci suit immédiatement du Théorème 5.4.3. Les détails sont laissés en exercice.

Le Théorème de Morera peut être considéré en quelque sorte la réciproque du Théorème de Cauchy.

## 5.5 ENCORE DE LA GÉOMÉTRIE.

Soit  $f$  une fonction polygène définie sur une région  $\Omega$  du plan complexe. Si  $f(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$  on considère les deux familles de courbes définies implicitement par  $\phi(x, y) = \text{constante}$  et  $\psi(x, y) = \text{constante}$  respectivement.

**Exemple 5.5.1** Si  $f$  s'exprime par  $f(z) = z^2 + z$  alors  $\phi(x, y) = x^2 + x - y^2$  et  $\psi(x, y) = 2xy + y$  et les deux familles de courbes sont définies par

$$x^2 + x - y^2 = \alpha \quad \text{et} \quad 2xy + y = \beta$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des constantes arbitraires. Il s'agit de deux familles de hyperboles. Dans le premier cas les asymptotes sont les droites  $y = \pm x - \frac{1}{2}$  et, dans le deuxième, les droites  $x = -\frac{1}{2}$  et  $y = 0$ . Si  $(x_0, y_0)$  est un point d'intersection de deux courbes, une de chaque famille, on note que les droites tangentes aux deux courbes au point d'intersection sont orthogonales car, si  $y'_1$  représente la pente d'une courbe de la première famille et  $y'_2$  celle d'une de la deuxième à un point d'intersection on a (si ni l'une ni l'autre des droites tangentes n'est parallèle aux axes des coordonnées) que

$$y'_1 y'_2 = \frac{1 + 2x_0}{2y_0} \frac{-2y_0}{1 + 2x_0} = -1.$$

ce qui implique que les deux droites sont orthogonales. (Au lecteur d'examiner les cas de pentes verticales et horizontales.)

**Fin de l'exemple.**

La fonction de l'exemple 5.5.1 était holomorphe et les deux familles de courbes se sont avérées orthogonales. Ceci n'était pas un accident comme le démontre le

**Théorème 5.5.1** Si  $f$ , définie par  $f(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$ , est une fonction régulière dans une région  $\Omega$ , les deux familles de courbes  $\phi(x, y) = \text{constante}$  et  $\psi(x, y) = \text{constante}$  forment un réseau orthogonal.

**Démonstration**

Considérons la famille de courbes définie par  $\phi(x, y) = \text{constante}$ . Ces courbes représentent la famille des solutions de l'équation différentielle

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} dx_1 + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy_1 = 0$$

et celle de la deuxième famille de l'équation

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} dx_2 + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy_2 = 0.$$

Les équations de Cauchy-Riemann impliquent que ces deux équations peuvent s'écrire comme

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} dx_1 + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy_1 = 0 \quad \text{et} \quad -\frac{\partial \phi}{\partial y} dx_2 + \frac{\partial \phi}{\partial x} dy_2 = 0$$

d'où il s'ensuit que les deux vecteurs tangents sont orthogonaux.

**C.Q.F.D.** ■

Si  $\phi$  est une fonction de classe  $C^2$  définie sur une région  $\Omega$  de  $\mathbb{C}$  alors  $\phi(x, y) = \text{constante}$  définit une famille de courbes du type discuté ci-haut. La famille de courbes  $\psi(x, y) = \text{constante}$  définies comme les solutions intégrales de l'équation différentielle

$$-\frac{\partial \phi}{\partial y} dx + \frac{\partial \phi}{\partial x} dy = 0$$

est orthogonale à la première famille et la fonction  $f = \phi + i\psi$  est régulière dans la région  $\Omega$ .

**Exemple 5.5.2** *Considérons la famille de courbes définie par  $\phi(x, y) = \cos x \cosh y = \text{constante}$  qui sont les solutions intégrales de l'équation différentielle*

$$\cos x \sinh y y' - \cosh y \sin x = 0$$

ou, écrit autrement

$$-\sin x \cosh y dx + \cos x \sinh y dy = 0.$$

La famille orthogonale doit satisfaire l'équation

$$\cos x \sinh y dx + \cosh y \sin x dy = 0.$$

Mais ceci est une différentielle exacte. En effet, si  $\psi(x, y) = \sin x \sinh y + k$  où  $k \in \mathbb{R}$

$$d\psi(x, y) = \cos x \sinh y dx + \cosh y \sin x dy = 0.$$

On note que

$$\cos x \cosh y + i(\sin x \sinh y + k) = \cos z + k$$

qui, peu importe la valeur de  $k$ , est une fonction régulière partout dans  $\mathbb{C}$ .

**Fin de l'exemple.**

Maintenant nous allons étudier une propriété fondamentale des contours dans  $\mathbb{C}$ . Soit  $\Gamma$  un contour fermé rectifiable<sup>2</sup>. L'**indice**  $I(\Gamma; z_0)$  de  $\Gamma$  par rapport à  $z_0$  est définie par la formule

$$I(\Gamma; z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dz}{z - z_0}.$$

Il est clair que l'indice est bien défini pour tout  $z$  qui n'est pas sur  $\Gamma$  et de plus elle a les propriétés élémentaires

$$I(-\Gamma; z_0) = -I(\Gamma; z_0)$$

et

$$I(\Gamma_1 + \Gamma_2; z_0) = I(\Gamma_1; z_0) + I(\Gamma_2; z_0).$$

La démonstration du résultat suivant est laissée en exercice.

<sup>2</sup>Rappelons qu'une courbe est *rectifiable* si sa longueur d'arc est définie comme un nombre réel positif  $L$  avec  $0 < L < \infty$ .

**Théorème 5.5.2** *Si  $\Gamma$  est un cercle centré au point  $z_0$  alors, si  $\Gamma$  est traversée une fois dans la direction positive,  $I(\Gamma; z_0) = 1$ .*

En effet, si on traverse le cercle  $n$  fois dans la direction positive la valeur 1 serait remplacée par  $n$  dans le Théorème 5.5.2. Si le cercle est parcouru dans le sens négatif les valeurs 1 et  $n$  seraient remplacées par  $-1$  et  $-n$  respectivement. La situation d'un cercle n'est qu'un cas spécial du résultat suivant.

**Théorème 5.5.3** *Si  $\Gamma$  est un contour fermé et rectifiable, alors l'indice  $I(\Gamma; z_0)$ ,  $z_0 \notin \Gamma$  est toujours un entier.*

**Démonstration**

Définissons une fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  par la formule

$$f(x) = \int_a^x \frac{z'(t)}{z(t) - z_0} dt, \quad a \leq x \leq b.$$

Ici on suppose que  $\Gamma$  est décrit lorsque  $t$  varie entre  $a$  et  $b$ . On aura démontré le résultat si on prouve que  $f(b) = 2n\pi i$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . On sait que  $f$  est continue sur  $[a, b]$  et aussi que

$$f'(x) = \frac{z'(x)}{z(x) - z_0}$$

en chaque point où  $z'$  est continue. Posons

$$g(t) = e^{-f(t)} [z(t) - z_0], \quad t \in [a, b].$$

Alors,

$$g'(t) = e^{-f(t)} z'(t) - f'(t) e^{-f(t)} [z(t) - z_0] = 0$$

sauf, peut-être, pour un nombre fini de points. Dans chaque sous-intervalle  $[t_1, t_2]$  de  $[a, b]$  où  $z'$  est continue on peut écrire

$$g(x) - g(t_1) = \int_{t_1}^x g'(t) dt = 0.$$

Donc,  $g$  est une constante sur chacun de ces sous-intervalles et, par la continuité de  $g$ , sur l'intervalle  $[a, b]$ . C'est-à-dire que  $g(t) = g(a)$  pour tout  $t \in [a, b]$  et il en résulte que  $e^{-f(b)} = 1$  ce qui implique que  $f(b) = 2\pi ni$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

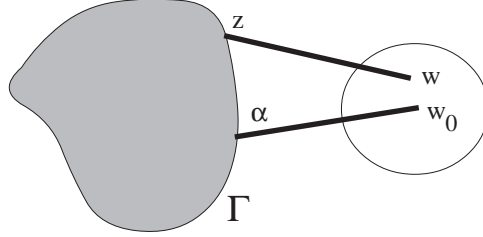
**C.Q.F.D.** ■

**Théorème 5.5.4** *Si  $\Gamma$  est un contour fermé simple (toujours rectifiable) décrit par une fonction continue sur l'intervalle  $[a, b]$ , alors  $I(\Gamma; z_0) = 0$  pour tout  $z_0$  à l'extérieur de  $\Gamma$ .*

**Démonstration**

Définissons la fonction  $f$  par

$$f(w) = I(\Gamma, w), \text{ si } w \in \mathbb{C} - \Gamma.$$

Figure 5.5:  $|\alpha - w_0| = \text{dist}(w_0, \Gamma)$ 

Si  $w_0$  est un point de  $\mathbb{C} - \Gamma$  posons  $\delta = \frac{1}{2} \text{dist}(w_0, \Gamma)$ <sup>3</sup>. Alors, pour tout  $w \in V(w_0, \delta)$  on a que, lorsque  $z$  parcourt  $\Gamma$  et  $w$  varie dans  $V(w_0, \delta)$ ,  $|z - w| \geq \delta$  (voir la Figure 5.5). Donc,

$$|f(w) - f(w_0)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left[ \frac{1}{z - w} - \frac{1}{z - w_0} \right] dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{|w - w_0|}{|z - w||z - w_0|} |dz| \leq \frac{L|w - w_0|}{2\pi\delta^2}$$

où  $L$  est la longueur de  $\Gamma$ . Donc,

$$\lim_{w \rightarrow w_0} [f(w) - f(w_0)] = \lim_{w \rightarrow w_0} \frac{1}{2\pi\delta^2} |w - w_0| = 0$$

ce qui démontre que  $f$  est continue sur  $\mathbb{C} - \Gamma$

Or, nous savons que la valeur de  $f(w)$ , sur  $\mathbb{C} - \Gamma$ , est toujours un entier d'où  $f$  doit être identiquement constante sur chaque composante de  $\mathbb{C} - \Gamma$ . C'est-à-dire  $f \equiv \text{constante}$  à l'intérieur de  $\Gamma$  et  $f \equiv \text{constante}$  à l'extérieur de  $\Gamma$  bien que ces constantes puissent être différentes. En fait, soit  $M > 0$  tel que  $|z(t)| < M$  pour tout  $t \in [a, b]$ . (Pourquoi une telle constante existe-t-il?) Si  $w_1$  est un point à l'extérieur de  $\Gamma$  tel que  $|w_1| > M + L$  où  $L$  est la longueur d'arc de  $\Gamma$  alors

$$\frac{1}{|z(t) - w_1|} \leq \frac{1}{||w_1| - |z(t)||} < \frac{1}{M + L - M} = \frac{1}{L}$$

et

$$0 \leq |f(w_1)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dz}{z - w_0} \right| < \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi L \cdot \frac{1}{L} = 1$$

d'où  $f(w_1) = 0$  (car  $f(w_1)$  doit être un entier). Par la continuité de  $f$  on a que  $f(w) \equiv 0$  à l'extérieur de  $\Gamma$ .

**C.Q.F.D.** ■

On accepte le résultat suivant sans démonstration.

**Théorème 5.5.5** Soit  $\Gamma$  un contour fermé simple et rectifiable. Alors, à l'intérieur de  $\Gamma$ ,  $I(\Gamma; z_0) \equiv +1$  ou  $I(\Gamma; z_0) \equiv -1$ .

<sup>3</sup>La distance  $\text{dist}(w, \Gamma)$  d'un point  $w \notin \Gamma$  et la courbe  $\Gamma$  est la valeur minimum de  $|w - z|$  lorsqu'on permet à  $z$  de parcourir  $\Gamma$ .

L'indice, dans les cas décrits par ce théorème, caractérise l'orientation du contour dans les sens que  $I(\Gamma; z_0) = +1$  indique que  $\Gamma$  est orienté positivement par rapport à  $z_0$  et la valeur  $-1$  indique une orientation négative.

Dans le cas d'un contour fermé rectifiable, l'indice est  $\pm$  le nombre de fois que le contour tourne autour de  $z_0$ .

Pour la courbe de la Figure 5.6 on note que les deux points où ce contour se recoupe peuvent être utilisés afin de le décomposer en trois courbes fermées simples. Le point  $\gamma$ , par exemple, se retrouve à l'intérieur de deux d'entre elles. Ceci est la valeur de l'indice de  $\gamma$  lorsque la courbe (complète) est traversée dans le sens positif.

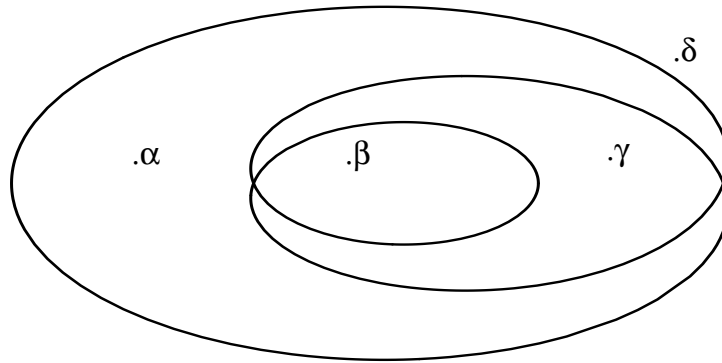


Figure 5.6: Pour cette courbe  $\Gamma$ ,  $I(\Gamma^+, \alpha) = 1$ ,  $I(\Gamma^+, \beta) = 3$ ,  $I(\Gamma^+, \gamma) = 2$ ,  $I(\Gamma^+, \delta) = 0$ .

**Exemple 5.5.3** Si  $\Gamma = \{z : z = e^{2it} - e^{it} - r, 0 \leq t \leq 2\pi, r \in \mathbb{R}\}$  évaluer  $I(\Gamma; 0)$ .

**Solution**

$$I(\Gamma; 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dz}{z - 0}.$$

Alors, si  $C$  est le cercle unitaire  $\{z : |z| = 1\}$  on peut écrire

$$I(\Gamma; 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{2w - 1}{w^2 - w - r} dw.$$

Posons  $\rho_1 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4r})$  et  $\rho_2 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 + 4r})$ . Alors,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{2w - 1}{w^2 - w - r} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{dw}{w - \rho_1} + \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{dw}{w - \rho_2}.$$

Nous savons déjà que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{dw}{w - z_0} = \begin{cases} 1, & \text{si } z_0 \in C^\circ, \\ 0, & \text{si } z_0 \in \text{ext}(C), \\ \text{indéfinie,} & \text{si } z_0 \in C. \end{cases}$$

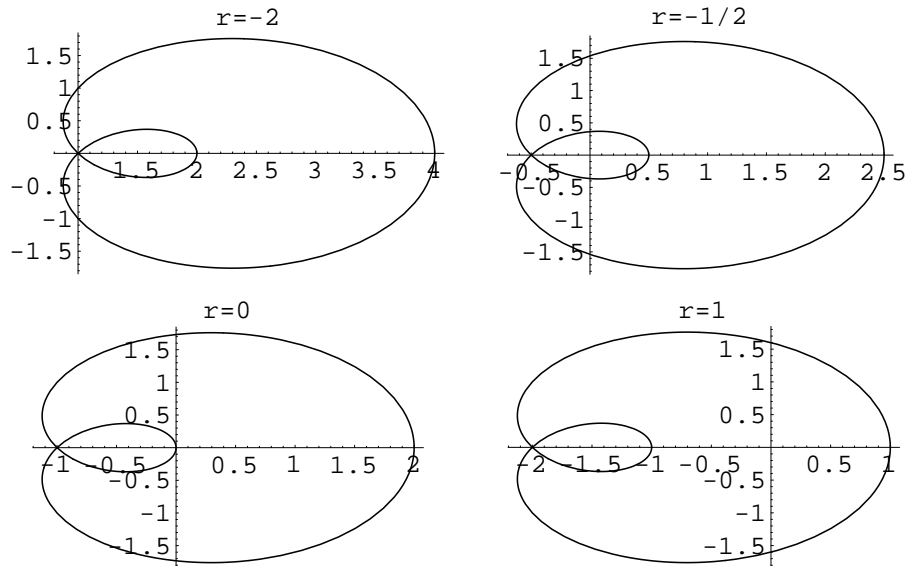


Figure 5.7:

La figure 5.7 montre l'image de la courbe pour quatre valeurs différentes de  $r$ . Notons que pour  $r = 0$ ,  $r = 2$  et  $r = -2$  l'image passe par l'origine et, alors, l'indice n'est pas définie.

#### Fin de l'exemple.

Supposons que  $f(z)$  soit un polynôme de degré  $n \geq 1$ . Un problème classique en algèbre consiste de la recherche et évaluation des racines de l'équation  $f(z) = 0$  associée au polynôme. Dans la plupart des cas une solution exacte qui s'exprime comme une formule « élémentaire » impliquant les coefficients ainsi que les puissances et racines de ces derniers ne peut être trouvée (ceci n'est possible, en général, que pour les équations des degrés 1, 2, 3 et 4) et nous sommes obligés d'employer les méthodes d'approximation pour calculer les racines.

Pour les équations polynomiales à coefficients réels il est possible d'affirmer plusieurs propriétés des racines par une simple inspection de la formule. Par exemple l'équation

$$f(z) = z^3 + 2z^2 + z + 1 = 0 \quad (5.19)$$

n'a aucune racine réelle positive car la somme de quatre nombres positifs ne saurait être 0. La règle de Descartes<sup>4</sup> appliquée à  $f(-z)$  implique qu'il y a soit trois racines réelles négatives, soit une racine

<sup>4</sup>Si  $f(z) = 0$  est une équation polynomiale à coefficients réels, le nombre de racines positives égale le nombre de variations de signe dans l'expression  $f(z)$  ou diffère de ce nombre par un multiple de deux. Par exemple, dans  $z^5 - 7z^4 + 6z^3 - 2z + 1 = 0$  il y a 4 variations de signe et selon cette règle l'équation a soit 4, soit 2 soit aucune racine(s) positive(s). L'expression  $f(-z) = -z^5 - 7z^4 - 6z^3 + 2z + 1$  montre une variation de signe impliquant l'existence certaine d'une racine négative.

réelle négative et deux autres qui sont proprement complexes. (On verra plus loin qu'une équation de degré  $n$  possède **toujours**  $n$  racines.) En notant que  $f(-2) = -1$  et  $f(-1) = 1$  on peut, par la continuité de  $f$  comme fonction réelle, affirmer qu'une racine négative se retrouve dans l'intervalle  $(-2, -1)$ . Une méthode générale d'approximation de la valeur de la racine pourrait consister de la rétrécissement de l'intervalle où le changement de signe se manifeste. Dans le cas de l'équation (5.19)  $f(-1.8) = -0.152$  et  $f(-1.7) = 0.167$  placent la racine dans l'intervalle  $(-1.8, -1.7)$ . La poursuite de cette méthode donnerait, éventuellement, la valeur approximative  $-1.75488$ . Il est à noter qu'il existe des méthodes numériques efficaces pour calculer ce type de racine par itération lesquelles sont présentées dans le contexte d'un cours d'analyse numérique.

Dans le domaine complexe où les coefficients et les racines peuvent être des valeurs dans  $\mathbb{C}$  il faut employer des méthodes différentes pour localiser les racines d'une équation parce que  $\mathbb{C}$  n'est pas ordonné.

Si  $\Gamma$  est un contour fermé simple et si  $f$  est une fonction polynomiale alors  $f(\Gamma)$  sera une courbe fermée mais qui n'est pas nécessairement simple dans le plan des images (codomaine) de  $f$ . Si  $f(\Gamma)$  ne passe pas par l'origine, l'indice  $I(f(\Gamma), 0)$  indique le nombre de fois que la courbe  $f(\Gamma)$  contourne l'origine lorsqu'on fait un tour complet de  $\Gamma$  dans le plan du domaine de  $f$ .

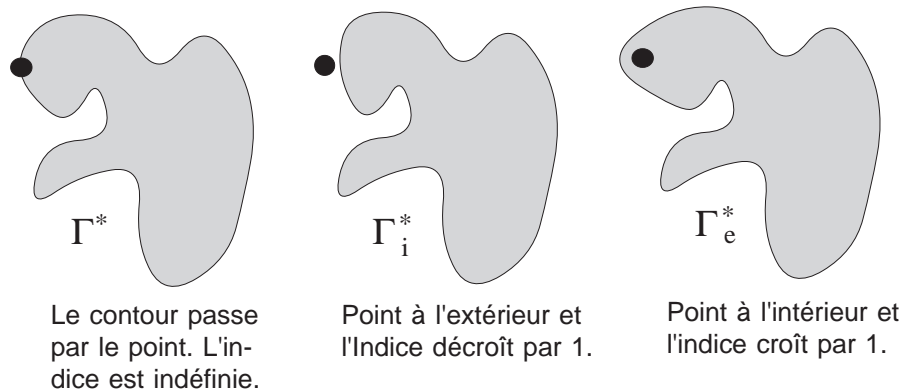


Figure 5.8:

Supposons que  $\Gamma^*$  soit un contour fermé simple qui passe par une racine  $z^*$  de  $f$ . Alors,  $I(f(\Gamma^*), 0)$  n'est pas définie. Selon le modèle de la Figure 5.8 on construit deux autres contours  $\Gamma_i^*$ , qui contourne  $z^*$  en le mettant à l'« extérieur », et  $\Gamma_e^*$  qui place  $z^*$  à l'« extérieur ». <sup>5</sup> Si les distorsions sont « assez petites » on peut conclure que  $I(f(\Gamma_e^*), 0) - I(f(\Gamma_i^*), 0) = 1$ . Ceci indique que, si  $f(\Gamma)$  ne passe pas par l'origine, **le nombre de racines de  $f(z) = 0$  à l'intérieur d'un contour fermé  $\Gamma$  dans le plan du domaine de  $f$  est égal à l'indice  $I(f(\Gamma), 0)$** . (Notons qu'il est toujours possible de choisir l'orientation de  $\Gamma$  pour que la valeur de l'indice soit positive.)

<sup>5</sup>Pour rendre l'argumentation utilisée ici rigoureuse requiert les résultats topologiques que nous ne pouvons présenter ici. Donc, on se laisse guider par ce qui semble être intuitivement correct.

Retournons à l'exemple fourni par l'équation (5.19). Si  $C_1$  et  $C_2$  sont deux cercles de rayons 0.7 et 0.8 respectivement. Nous trouvons que  $I(f(C_1), 0) = 0$  et  $I(f(C_2), 0) = 2$  impliquant qu'il y a deux racines dans l'anneau délimité par les deux cercles. (Voir la Figure 5.9.)

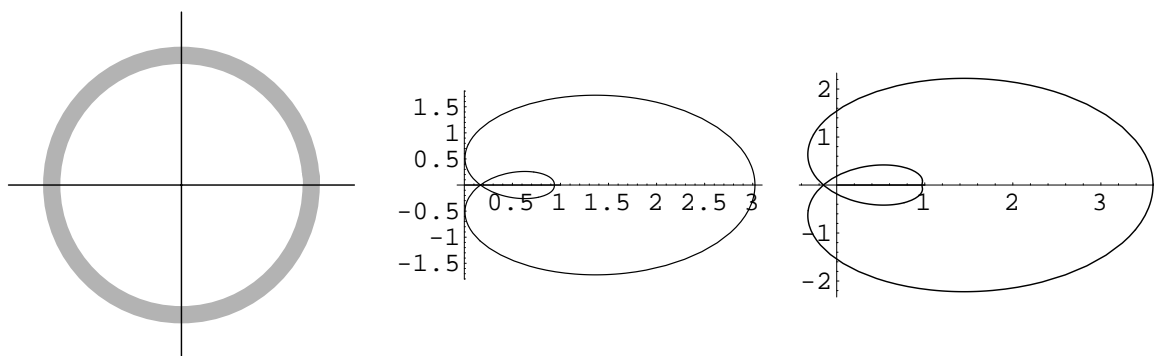


Figure 5.9: Les cercles  $C_1$ ,  $C_2$  et les courbes  $f(C_1)$ ,  $f(C_2)$ .

## 5.6 EXERCICES

### SECTION 5.1

**5.1** Utiliser le Théorème de Cauchy pour la fonction définie par  $f(z) = e^{-z^2}$  avec le contour décrit par le segment  $[0, R]$ , la partie du cercle  $|z| = R$  pour  $\theta \in [0, \pi/4]$  et le segment  $[0, Re^{i\pi/4}]$  pour montrer que

$$\int_0^\infty \cos x^2 = \int_0^\infty \sin x^2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

**5.2** En remplaçant  $\pi/4$  par  $\pi/8$  dans le problème 1, démontrer que

$$\int_0^\infty e^{-t^2} \cos t^2 dt = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \sqrt{1 + \sqrt{2}}.$$

**5.3** Si  $\Gamma$  est un carré, prouver directement que  $\int_\Gamma dz = 0$ .

**5.4** Si  $\Gamma$  est un triangle montrer que

$$\int_\Gamma dz = 0 \quad \text{et} \quad \int_\Gamma z dz = 0.$$

**5.5** Si  $C = \{z : |z| = 1\}$  évaluer

**A)**  $\int_C \cos(\sin z) dz$ , **B)**  $\int_C \left(z + \frac{1}{z}\right) dz$ ,

**C)**  $\int_C \frac{z^7}{z^4+3} dz$ , **D)**  $\int_C \bar{z} dz$ ,

**E)**  $\int_C \tan z dz$ .

**5.6** ★ Si  $0 < \beta < 1$  montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \beta^2 + x^2}{(1 - \beta^2 + x^2)^2 + 4\beta^2 x^2} dx = \pi.$$

(Suggestion: Utiliser la fonction définie par  $f(z) = (1 + z^2)^{-1}$ .)

### SECTION 5.2

**5.7** Si  $C$  est un contour fermé simple, montrer que l'aire renfermée par  $C$  est

$$A = \frac{1}{2i} \int_C \bar{z} dz = \frac{1}{2} \int_C r^2 d\theta.$$

**5.8** Si  $f, g$  sont holomorphes sur et à l'intérieur d'un contour fermé simple  $\Gamma$ , montrer que

$$\frac{1}{2i} \int_{\Gamma} \overline{f(z)} g(z) dz = \iint_{\text{int}(\Gamma)} \overline{f'(z)} g(z) dx dy.$$

**5.9** ★ Si  $P(z) = \sum_0^n a_k z^k$  et si  $D = \{a : |z| < R\}$ , montrer que

$$\iint_D |P(z)|^2 dx dy = \pi \sum_0^n \frac{|a_k|^2}{1+k} R^{2k+2}.$$

**5.10** Comment peut-on caractériser la dérivée polygène d'une fonction ayant la propriété que  $\frac{\partial f}{\partial z} \equiv \text{constante}$  sur sa région de définition?

### SECTION 5.3

**5.11** Montrer que la définition du produit scalaire donnée dans cette section satisfait les conditions

$$A \bullet B = B \bullet A, \quad A \bullet (B + C) = A \bullet B + A \bullet C$$

où  $A, B, C \in \mathbb{C}$ .

**5.12** Formuler une définition d'un « produit vectoriel »  $A \times B$  de deux nombres complexes. Justifier votre définition en fournissant quelques propriétés et exemples.

**5.13** Montrer que si  $F$  et  $G$  sont polygènes dans une région  $\Omega$  alors

- A)  $\text{rot}(F + G) = \text{rot}(F) + \text{rot}(G)$ ,
- B)  $\text{grad}(FG) = F \text{grad}G + G \text{grad}F$ ,
- C)  $\text{rot grad } F = 0$  si  $F$  est une fonction réelle.

**5.14** Montrer que si  $F$  et  $G$  sont polygènes alors

$$\nabla^2(FG) = F\nabla^2G + G\nabla^2F + 2\nabla F \bullet \nabla G.$$

**5.15** Montrer que si  $f$  est régulière (et de classe  $C^2$ ) dans une région  $\Omega$  alors

$$\nabla^2|f(z)|^2 = 4|f'(z)|^2.$$

**5.16** ★ Montrer qu'une équation réelle  $F(x, y) = \alpha$  où  $\alpha$  est une constante peut s'écrire sous la forme  $f(x, y) = \text{constante}$  où  $f$  est harmonique si et seulement s'il existe une fonction  $G$  d'une variable telle que

$$\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}}{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2} = G(F).$$

**5.17** Si un champ de force  $F$  est défini dans  $\mathbb{R}^2$  par les vecteurs  $(x^2 - y^2, 2xy)$  quel est le travail accompli si une particule traverse une fois le cercle défini par  $|z - 1| = r$  ( $r > 0$ ).

**5.18** Quelles sont les courbes d'équipotentielle associés au champ de force conservateur défini par

$$F = e^x \cos y - ie^x \sin y ?$$

**5.19** Donner une interprétation géométrique de la divergence.

**5.20** Montrer qu'en imposant des conditions appropriées sur la fonction  $f$

$$\nabla^2 f^n(z) = n^2 |f(z)|^{n-2} |f'(z)|^2.$$

## SECTION 5.4

**5.21** Supposons que  $\Gamma$  représente la frontière de la région entre le cercle  $|z| = 4$  et le carré défini par  $(\pm 1, \pm 1)$ . Évaluer  $\int_{\Gamma} f(z) dz$  si

$$\mathbf{A)} \quad f(z) = \frac{1}{3z^2 + 1} \quad \mathbf{B)} \quad f(z) = \frac{e^z}{1 - ez}.$$

**5.22** Montrer que si  $C$  est un contour fermé simple qui ne passe pas par l'origine alors

$$\int_C \frac{dz}{z^2} = 0.$$

**5.23** Prouver que pour chaque contour  $\Gamma$  reliant  $a$  et  $b$  avec  $a \neq b$

$$\int_{\Gamma} z^n dz = \frac{1}{n+1} [b^{n+1} - a^{n+1}], \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

**5.24** Si  $P(z) = \prod_{k=1}^n (z - a_k)$  et si pour tout  $k$ ,  $a_k \in \text{int}(\Gamma)$  où  $\Gamma$  est un contour fermé simple, prouver que

$$\int_{\Gamma} \frac{P'(z)}{P(z)} dz = 2\pi i n.$$

**5.25** Supposons que  $C$  se compose du cercle  $|z| = 5$  décrit dans le sens positif et du cercle  $|z| = 1$  décrit dans le sens négatif. Quelle est la valeur de

$$\int_C \frac{dz}{z^2 + 16} ?$$

## SECTION 5.5

**5.26** Vérifier le Théorème 5.5.1 pour les fonctions

$$\mathbf{A)} \quad f(z) = z^3, \quad \mathbf{B)} \quad f(z) = e^z + z.$$

**5.27** Dessiner des courbes ayant les propriétés suivantes pour une infinité de points du plan. Pour chacune de vos courbes évaluer  $I(\Gamma)$  pour tous les autres points où celle-ci est définie.

$$\mathbf{A)} \quad I(\Gamma; z) = 1, \quad \mathbf{B)} \quad I(\Gamma; z) = -1, \quad \mathbf{C)} \quad I(\Gamma; z) = 4.$$

**5.28** Si  $\Gamma$  est le cercle définie par  $\{z : |z| = 2\}$  évaluer  $I(f(\Gamma), 0)$  pour les fonctions suivantes:

$$\begin{aligned} \mathbf{A)} \quad f(z) &= (z-1)(z+4)(z+1+i), \\ \mathbf{B)} \quad f(z) &= z^3 + (1-i)z^2 - iz, \\ \mathbf{C)} \quad f(z) &= z^4 - 2z^2 + 1, \\ \mathbf{D)} \quad f(z) &= z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1. \end{aligned}$$

**5.29** ★ Montrer, sans évaluer les solutions, que l'équation  $z^5 + iz + 1 = 0$  a trois racines au dessus de l'axe réel dont deux se retrouvent dans le deuxième quadrant.

