

# Chapitre 4

## L'INTÉGRALE

### 4.1 PRÉSENTATION GÉNÉRALE

Après l'étude de la dérivée il est tout à fait naturel de vouloir traiter le problème inverse lequel peut se poser comme suit: *Pour une fonction complexe  $f$  donnée existe-t-il une fonction  $g$  telle que  $g'(z) = f(z)$ ?* Il va de soi que, telle que posée, la question manque de précision mais c'est un point de départ comme dans les cours de calcul réel. L'approche intuitive utilisée dans cette section sera compensée par un développement plus rigoureux dans les sections qui suivent.

Si  $g$  est une fonction holomorphe dans une région  $\Omega$  et si  $f = g'$  est sa fonction dérivée on dit que  $g$  est une **anti-dérivée** ou une **intégrale** de la fonction  $f$  et on écrit  $g = \int f$  ou, en suivant la tradition,  $g(z) = \int f(z) dz$ . À partir de ce que nous avons vu jusqu'ici il est possible de construire des tables d'anti-dérivées pour un grand nombre de fonctions élémentaires. Voici une petite table.

$f(z)$	$\int f(z) dz$		$f(z)$	$\int f(z) dz$	
$z^n$	$\frac{z^{n+1}}{n+1}$	$n \in \mathbb{N}$	$\sin az$	$-\frac{1}{a} \cos az$	$a \in \mathbb{C}^*$
$e^{az}$	$\frac{1}{a} e^{az}$	$a \in \mathbb{C}^*$	$\cos az$	$\frac{1}{a} \sin az$	$a \in \mathbb{C}^*$
$\frac{1}{z}$	$\log z$		$\sinh az$	$\frac{1}{a} \cosh az$	$a \in \mathbb{C}^*$
$\log z$	$z \log z - z$		$\cosh az$	$\frac{1}{a} \sinh az$	$a \in \mathbb{C}^*$

En général, ces tables sont formellement identiques à celles qu'on formule pour les fonctions réelles mais, dans le cadre des fonctions complexes dont le domaine peut être une surface de Riemann compliquée et qui possèdent, possiblement, des singularités de différentes sortes, il faut porter un grand soin quant à l'interprétation de ces formules. (La nature des singularités des fonctions complexes sera examinée plus loin.)

Si  $f$  est une fonction réelle continue définie sur un intervalle  $[a, b]$ ,  $-\infty < a < b < \infty$  et si  $t, x \in [a, b]$  avec  $f(t) \geq 0$  alors  $\int_a^x f(t) dt$  représente l'aire délimitée par l'axe réel, les droites verticales  $t = a$ ,  $t = x$  et la courbe définie par  $y = f(x)$ . (La justification de cette interprétation suit de la définition de l'intégrale de Riemann. (Voir la section 4.2.) En effet la notation utilisée

pour l'intégrale provient de l'idée de l'approximation d'un petit morceau de l'intégrale par l'aire d'un petit rectangle de hauteur  $f(t)$  et de base  $dt$ . Si la fonction  $f$  change de signe dans l'intervalle on divise ce dernier en sous-intervalles dans lesquels  $f$  ne change pas de signe (c-à-d où elle est toujours  $\leq 0$  ou  $\geq 0$ ). Puis, l'interprétation géométrique demeure valable, sauf pour la question de signe, dans chaque sous-intervalle.

Pour cette même fonction réelle on peut considérer l'extrémité  $x$  comme une variable de telle sorte que  $\int_a^x f(t) dt$  définit une fonction  $F$ . Le Théorème fondamental du Calcul dit que la relation entre  $F(x)$  et  $f(x)$  est effectivement  $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = F'(x) = f(x)$  ce qui établit la relation entre cette interprétation de l'intégrale et l'anti-dérivée.

Le type de présentation géométrique utilisée pour l'intégrale réelle ne se traduit pas directement pour l'intégrale complexe, et ce pour plusieurs raisons. D'abord, si  $a$  et  $b$  sont deux nombres complexes  $\int_a^b f(z) dz$  devrait représenter une valeur obtenue en laissant  $z$  varier «entre»  $a$  et  $b$ . Mais, sans autres considérations, le mot «entre» n'a pas de sens lorsqu'appliqué à deux nombres complexes.

Une façon d'aborder le problème est de considérer un problème restreint où on permet à  $z$  de se promener «entre»  $a$  et  $b$  en imposant la restriction que  $z$  doit rester sur une courbe  $C$  qui relie les deux points. (Dans ce cas le mot entre est bien défini lorsqu'on se sert de l'ordre des points de la courbe induite par sa paramétrisation.) Il va sans dire que la valeur obtenue, par les méthodes qui restent à décrire, sera dépendante de la courbe  $C$ . Pour  $a$  et  $b$  fixe on écrira  $I(C) = \int_a^b f(z) dz$ .

Notre problème maintenant est de décider comment attribuer une valeur à  $I(C)$ . Dans la poursuite de cet objectif nous allons faire des calculs formels qui semblent être corrects sur une base purement intuitive. D'abord, supposons que  $f$  puisse se représenter comme  $f(z) = u(z) + iv(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ <sup>1</sup> et  $dz = dx + i dy$ . Alors,

$$\begin{aligned} f(z) dz &= [u(x, y) + iv(x, y)] (dx + i dy) \\ &= u(x, y)dx - v(x, y)dy + i(v(x, y)dx + u(x, y)dy) \end{aligned}$$

et  $I(C) = H(C) + iK(C)$  où

$$\begin{aligned} H(C) &= \int_a^b u dx - v dy = \int_a^b u(x, y) dx - \int_a^b v(x, y) dy, \\ K(C) &= \int_a^b v dx + u dy = \int_a^b v(x, y) dx + \int_a^b u(x, y) dy. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Considérons la possibilité de relier les deux points  $a, b$  par la courbe  $C = C_x \cup C_y$  où  $C_x$  et  $C_y$  sont les segments

$$C_x = [a, \Re(b) + i \Im(a)] \quad , \quad C_y = [\Re(b) + i \Im(a), b] .$$

Sur  $C_x$ ,  $y$  demeure constante à savoir  $y = \Im(a)$  et, sur  $C_y$ ,  $x \equiv \Re(b)$ . Donc, en notant que  $dy = 0$  sur  $C_x$  et  $dx = 0$  sur  $C_y$

---

<sup>1</sup>Écrire  $h(z) = h(x, y)$  est, bien sûr, un abus de notation. On le permet afin d'éviter les expressions comme  $h(z) = h((x, y))$  ou l'introduction, peu utile, de nouveaux noms comme  $h(z) = \varkappa(x, y)$

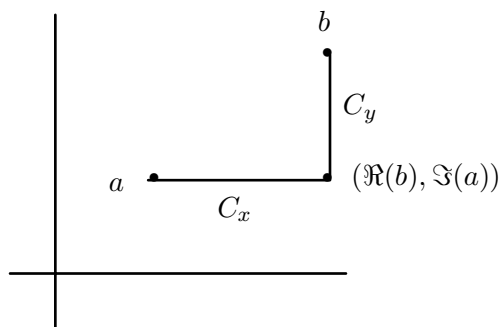


Figure 4.1:

$$\begin{aligned}
 I(C_x) &= \int_{\Re(a)}^{\Re(b)} u(x, \Im(a)) dx + i \int_{\Re(a)}^{\Re(b)} v(x, \Im(a)) dx, \\
 I(C_y) &= - \int_{\Im(a)}^{\Im(b)} v(\Re(b), y) dy + i \int_{\Im(a)}^{\Im(b)} u(\Re(b), y) dy.
 \end{aligned}
 \tag{4.2}$$

où chaque intégrale peut être évaluée par les méthodes usuelles du calcul réel. Il s'ensuit que  $I(C) = I(C_x) + I(C_y)$ .

**Exemple 4.1.1** Utiliser la méthode décrite ci-haute pour évaluer

$$I(C) = \int_0^{2+i} \bar{z} dz$$

### Solution

Ici on trouve que  $C_x = [0 + 0i, 2 + 0i]$  et  $C_y = [2 + 0i, 2 + i]$  et

$$\begin{aligned}
 I(C_x) &= \int_0^2 (x - 0i) dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 = 2 + 0i, \\
 I(C_y) &= \int_0^1 (2i + y) dy = 2iy \Big|_0^1 + \frac{y^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} + 2i.
 \end{aligned}$$

Donc,  $I(C) = I(C_x) + I(C_y) = \frac{5}{2} + 2i$ .

**Fin de l'exemple.**

La méthode présentée ci-haute n'est pas assez générale pour nos besoins. D'abord, il y a un problème avec les fonctions dont le domaine de définition ne permet pas la construction des intervalles  $C_x$  et  $C_y$  dans le sens que ces derniers contiennent des points où la fonction à intégrer ne soit pas définie. Une meilleure approche est de permettre les points  $a$  et  $b$  d'être joints par n'importe

quelle courbe  $C$  laquelle permettra le calcul d'une valeur pour  $I(C)$  qui est « mathématiquement acceptable ». Il est clair qu'on doit se résigner au fait que les courbes différentes engendreront, en général, des valeurs différentes pour l'intégrale.

Observons que, formellement,  $\int_a^b f(z) dz$  peut s'écrire comme  $H(C) + iK(C)$  où  $H(C)$  et  $K(C)$  sont des expressions de la forme

$$G(C) = \int_{C(a,b)} \phi(x, y) dx + \psi(x, y) dy \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{C(a,b)} \phi(x, y) dx + \int_{C(a,b)} \psi(x, y) dy \quad (4.3)$$

où les intégrales doivent être évaluées en utilisant la courbe  $C$ . *Mais, comment?*

Si  $C$  est un arc régulier défini par les deux équations paramétriques  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  où  $\alpha < t < \beta$  et si  $a = x(\alpha) + iy(\alpha)$ ,  $b = x(\beta) + iy(\beta)$  alors, lorsque  $t$  varie entre  $\alpha$  et  $\beta$ , les points  $(x(t), y(t))$  tracent l'arc  $C$  qui relie  $a$  et  $b$ . L'intégrale (4.3) est évaluée en remplaçant  $x$  et  $y$  par les équations paramétriques de  $C$ .

$$G(C) = \int_{\alpha}^{\beta} \phi(x(t), y(t)) dx(t) + \psi(x(t), y(t)) dy(t). \quad (4.4)$$

Vu que les équations définissant  $C$  sont de classe  $C^1$  il est permis d'écrire

$$G(C) = \int_{\alpha}^{\beta} \phi(x(t), y(t)) \dot{x}(t) dt + \psi(x(t), y(t)) \dot{y}(t) dt \quad (4.5)$$

où  $\dot{x} = dx/dt$  et  $\dot{y} = dy/dt$ .

Si  $C$  est un arc régulier par morceaux la formule exprimée par (4.5) est encore applicable car nous pouvons décomposer  $C$  en arcs réguliers puis remettre le tout ensemble après selon les lois valables pour les intégrales réelles.

**Exemple 4.1.2** Pour la fonction  $f$  de l'Exemple 4.1.1 évaluer  $I(\Gamma)$  si <sup>2</sup>

1.  $\Gamma = [0, i] \cup [i, 2 + i]$ ,
2.  $\Gamma = \{z(t) = 2t + ti : 0 \leq t \leq 1\}$ ,
3.  $\Gamma = \{(x, y) : y = (x/2)^n : 0 \leq x \leq 2 : 2 \leq n \in \mathbb{N}\}$ .

### Solution

1. L'arc  $\Gamma$  est régulier par morceaux et on peut écrire

$$\begin{aligned} I(\Gamma) &= \int_{\Gamma(0,2+i)} \bar{z} dz = \int_{[0,i]} y dy + \int_{[i,1+2i]} x dx - i \int_{[i,1+2i]} y dx \\ &= \frac{y^2}{2} \Big|_0^1 + \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 - ix \Big|_0^2 = \frac{5}{2} - 2i. \end{aligned}$$

<sup>2</sup>Pour les intervalles on peut aussi bien écrire  $[z_1, z_2]$  ou  $[(x_1, y_1), (x_2, y_2)]$ . Dans les deux cas  $x$  varie entre  $x_1$  et  $x_2$ ;  $y$  varie entre  $y_1$  et  $y_2$ . Il se peut que  $x_1 = x_2$  ou  $y_1 = y_2$ .

2. Ici l'arc est régulier et l'application de (4.5) aux parties réelle et imaginaire de  $I(\Gamma)$  nous donne

$$\begin{aligned} I(\Gamma) &= \int_{\Gamma(0,2+i)} \bar{z} dz = \int_0^1 (2t\dot{x} + t\dot{y}) dt + i \int_0^1 (2t\dot{y} - t\dot{x}) dt \\ &= \int_0^1 5t dt + i \int_0^1 0 \cdot dt = \frac{5}{2}t^2 \Big|_0^1 = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

3. Ici on utilise les équations paramétriques  $x(t) = t$  et  $y(t) = (t/2)^n$  pour décrire l'arc régulier  $\Gamma$ . Alors,  $\dot{x} = 1$  et  $\dot{y} = nt^{n-1}/2^n$ . Puis

$$\begin{aligned} I(\Gamma) &= \int_{\Gamma(0,2+i)} \bar{z} dz = \int_0^2 (t\dot{x} + (t/2)^n \dot{y}) dt + i \int_0^2 (-(t/2)^n \dot{x} + t\dot{y}) dt \\ &= \int_0^2 (t + nt^{2n-1}/2^{2n}) dt + i(n-1)/2^n \int_0^2 t^n dt \\ &= \frac{t^2}{2} \Big|_0^2 + \frac{nt^{2n}}{n2^{2n+1}} \Big|_0^2 + i \frac{n-1}{n+1} \frac{t^{n+1}}{2^n} \Big|_0^2 \\ &= 2 + \frac{2^{2n}n}{n2^{2n+1}} + 2i \frac{n-1}{n+1}. \\ &= \frac{5}{2} + 2i \frac{n-1}{n+1} \end{aligned}$$

Il est intéressant à noter que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{5}{2} + 2i \frac{n-1}{n+1} \right) = \frac{5}{2} + 2i$$

ce qui est exactement la réponse trouvée dans l'Exemple 4.1.1. Que se passe-t-il?

Les exemples 4.1.1 et 4.1.2 montrèrent que l'intégrale de la fonction complexe définie par  $f(z) = \bar{z}$  évaluée sur quatre courbes différentes pouvait produire quatre valeurs différentes. Si le lecteur refait ces mêmes exercices en remplaçant la fonction par  $f(z) = z$  il trouvera que le résultat pour chaque courbe est  $\frac{-3+4i}{2}$  qui est la valeur de  $\frac{1}{2}z^2$  pour  $z = 1 + 2i$ . Ceci n'est pas du pur hasard comme on le verra dans la suite.

**Exemple 4.1.3** Évaluer  $I(\Gamma) = \int_{\Gamma} z^2 dz$  si

- A)  $\Gamma = [-1, i] \cup [i, 1]$ ,  
 B)  $\Gamma = \left\{ z(t) = t + i \cos \frac{\pi t}{2} : -1 \leq t \leq 1 \right\}$

**Solution**

A) Pour la première partie de l'arc  $[-1, i]$  – les équations paramétriques  $z = z(t) = t - 1 + it : 0 \leq t \leq 1$  peuvent être employées; et pour la seconde partie  $[i, 1]$  on utilisera  $z = z(t) = t + i(-t + 1) : 0 \leq t \leq 1$ . Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} z^2 dz &= \int_0^1 [(t-1) + it]^2 (1+i) dt + \int_0^1 [t + (1-t)i]^2 (1-i) \\ &= \int_0^1 (2i + 4(1-i)t - 4t^2) dt \\ &= 2it \Big|_0^1 + 2(1-i)t^2 \Big|_0^1 - \frac{4}{3}t^3 \Big|_0^1 \\ &= 2i + 2(1-i) - \frac{4}{3} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

B) Dans ce cas la substitution des équations paramétriques donne

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} z^2 dz &= \int_{-1}^1 \left[ t + i \cos \frac{\pi t}{2} \right]^2 \left[ 1 - \frac{i\pi}{2} \sin \frac{\pi t}{2} \right] dt \\ &= \int_{-1}^1 \left\{ t^2 + 2\pi t \sin \pi t - \cos^2 \frac{\pi t}{2} + i \left( -\frac{\pi}{2} t^2 \sin \frac{\pi t}{2} + 2t \cos \frac{\pi t}{2} + \frac{\pi}{2} \cos^2 \frac{\pi t}{2} \sin \frac{\pi t}{2} \right) \right\} dt \\ &= \int_{-1}^1 \left( t^2 + 2\pi t \sin \pi t - \cos^2 \frac{\pi t}{2} \right) dt \\ &= \frac{t^3}{3} \Big|_{-1}^1 + \left[ \frac{-t \cos \pi t}{2} + \frac{\sin \pi t}{2\pi} \right] \Big|_{-1}^1 - \left[ \frac{t}{2} + \frac{\sin \pi t}{2\pi} \right] \Big|_{-1}^1 = \frac{2}{3} + 1 - 1 = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Notons que dans le passage de la ligne 2 à la ligne 3 dans les calculs ci-hauts nous avons évité plusieurs intégrations par l'utilisation du fait que l'intégrale d'une fonction impaire est une fonction paire de telle sorte que son évaluation par rapport à un intervalle de la forme  $[-\alpha, \alpha]$  donne 0.

À ce point nous tenterons de regarder le problème de l'intégrale d'un autre angle. Pour ce faire il nous faut quelques concepts du calcul dans  $\mathbb{R}^2$ .

Supposons que  $p = \phi(x, y)$  et  $q = \psi(x, y)$  soient deux fonctions réelles définies sur une même région  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$  et supposons aussi que les fonctions  $p$  et  $q$  soient d'au moins classe  $C^1$  sur  $\Omega$ . Considérons l'ensemble

$$F = \{(\phi(x, y), \psi(x, y)) : (x, y) \in \Omega\} . \quad (4.6)$$

Si on interprète les couples de  $F$  comme des vecteurs libres pour chacun desquels le point initial est  $(x, y)$  et les composantes sont  $(\phi(x, y), \psi(x, y))$  alors la structure qui en résulte est un **champs vectoriel** qu'on dénotera par  $\vec{F} = \vec{F}(x, y)$  ou, si le contexte le permet, par  $F = F(x, y)$ . Le vecteur

zéro est assigné pour les points où  $\phi(x, y) = \psi(x, y) = 0$ . Pour les autres points la valeur absolue du vecteur est

$$\sqrt{\phi^2(x, y) + \psi^2(x, y)}$$

et sa direction est déterminée par l'angle  $\theta$  qui satisfait

$$\cos \theta = \frac{\phi(x, y)}{\sqrt{\phi^2(x, y) + \psi^2(x, y)}}, \quad \sin \theta = \frac{\psi(x, y)}{\sqrt{\phi^2(x, y) + \psi^2(x, y)}}, \quad -\pi < \theta \leq \pi.$$

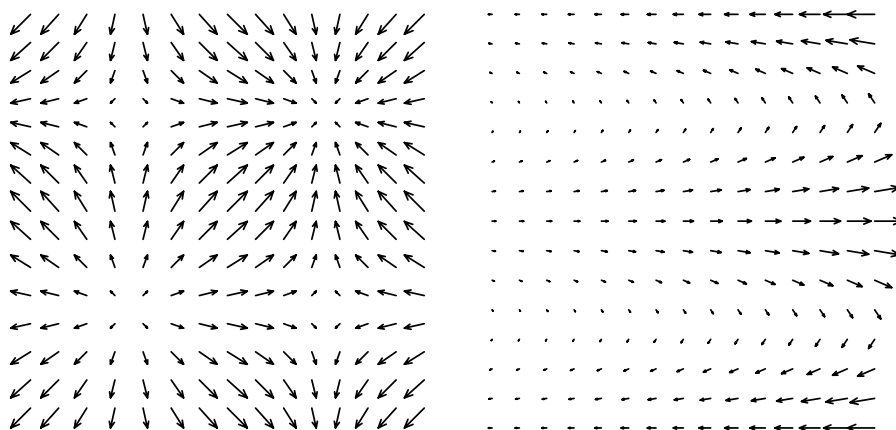


Figure 4.2:

La Figure 4.2 montre les champs vectoriels

$$\begin{aligned} \vec{F}_1 &= \{(\cos x, \cos y) : -\pi < x \leq \pi, -\pi < y \leq \pi\} \\ \vec{F}_2 &= \{(e^x \cos y, e^x \sin y) : -1 \leq x \leq 1, -\pi < y \leq \pi\}. \end{aligned}$$

On associe au champ vectoriel défini par (4.6) la **forme différentielle**

$$\Delta(\vec{F}) = \phi(x, y) dx + \psi(x, y) dy.$$

S'il existe une fonction  $U(x, y)$  définie sur une région  $\Omega^* \subseteq \Omega$  telle que

$$dU(x, y) = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy = \Delta(F) = \phi(x, y) dx + \psi(x, y) dy$$

on dit que la forme  $\Delta(\vec{F})$  est **exacte** et que  $U(x, y)$  est une **intégrale du champs vectoriel**  $\vec{F}$ . Notons que  $\Delta(\vec{F}) = 0$  est une équation différentielle de premier ordre et la famille de courbes définie par  $U(x, y) = c$ , où  $c$  est une constante arbitraire, est sa *solution générale*.

Voici quelques exemples de formes différentielles exactes:

$\Delta(\vec{F})$	$U(x, y)$
$x dy + y dx$	$xy$
$-\frac{y}{x^2} dx + \frac{1}{x} dy$	$\frac{y}{x}, \quad (x \neq 0)$
$\left(\frac{e^x y}{x} + e^x \log xy\right) dx + \frac{e^x}{y} dy$	$e^x \log xy, \quad (xy \neq 0)$
$(xy \cos xy + \sin xy) dx + x^2 \cos xy dy$	$x \sin xy$

**Exemple 4.1.4** Soient  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$  les champs vectoriels correspondants aux formes

$$\Delta(\vec{F}_1) = x dx - y dy \quad , \quad \Delta(\vec{F}_2) = y dx + x dy .$$

Ces formes sont toutes les deux exactes. En effet  $U_1(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$  et  $U_2(x, y) = xy$ .

Si  $C$  est une des courbes de la famille d'hyperboles  $U_1(x, y) = c$  on trouve, par les méthodes du calcul élémentaire, que la direction de la droite tangente à  $C$  est déterminée par  $\theta_1$  où  $\tan \theta_1 = -\frac{x_0}{y_0}$ , si  $y_0 \neq 0$ . La direction du vecteur du champs  $\vec{F}_1$  pour ce même point satisfait  $\tan \theta_2 = \frac{y_0}{x_0}$ , si  $x_0 \neq 0$  et le calcul du produit  $(\tan \theta_1)(\tan \theta_2) = -1$  indique une relation d'orthogonalité entre les vecteurs du champs  $\vec{F}_1$  et les courbes de la famille  $U_1(x, y) = c$ . Il est laissé en exercice la vérification que cette même situation se reproduit pour  $\vec{F}_2$  et la famille  $U_2(x, y) = c$ . Les deux cas sont présentés dans la Figure 4.3.

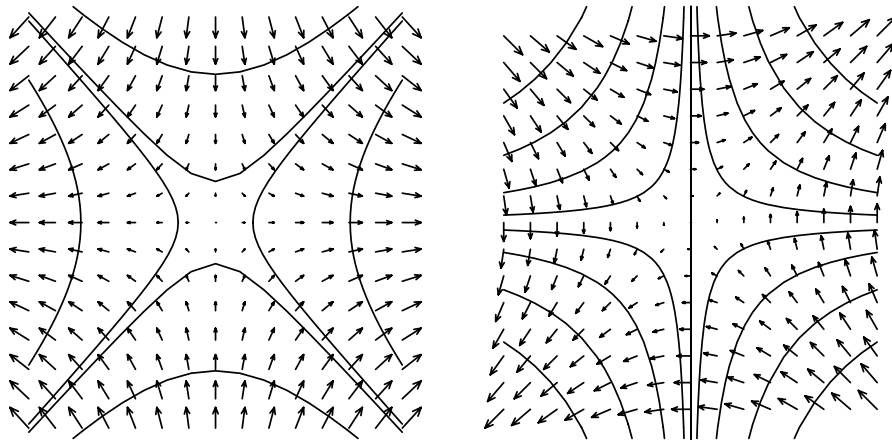


Figure 4.3:

Il est à noter que

$$\Delta(\vec{F}_1) + i\Delta(\vec{F}_2) = z dz$$

et

$$U_1(x, y) = \Re\left(\frac{z^2}{2}\right) \quad , \quad U_2(x, y) = \Im\left(\frac{z^2}{2}\right) .$$

Si  $f$  est une fonction polygène définie dans une région  $\Omega$  les expressions  $f(z) dz$  et  $f(z) d\bar{z}$  s'appellent **formes différentielles complexes**. Supposons que  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  alors

$$\begin{aligned} f(z) dz &= u dx - v dy + i(v dx + u dy) = \Delta(\vec{P}) + i\Delta(\vec{Q}) , \\ f(z) d\bar{z} &= u dx + v dy + i(v dx - u dy) = \Delta(\vec{P}^*) + i\Delta(\vec{Q}^*) . \end{aligned}$$

où  $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{P}^*, \vec{Q}^*$  sont des champs vectoriels réels

$$\begin{aligned} \vec{P} &= \{(u(x, y), -v(x, y)) : (x, y) \in \Omega\} , & \vec{Q} &= \{(v(x, y), u(x, y)) : (x, y) \in \Omega\} , \\ \vec{P}^* &= \{(u(x, y), v(x, y)) : (x, y) \in \Omega\} , & \vec{Q}^* &= \{(v(x, y), -u(x, y)) : (x, y) \in \Omega\} . \end{aligned}$$

Si les formes  $\Delta(\vec{P})$  et  $\Delta(\vec{Q})$  sont exactes on convient de dire que la forme complexe  $f(z) dz$  est exacte. Dans ce cas il existe deux fonctions  $U$  et  $V$  définies sur la région  $\Omega$  telles que

$$\frac{\partial U}{\partial x} = u, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -v, \quad \frac{\partial V}{\partial x} = v, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = u$$

et, si  $G = U + iV$

$$\frac{\partial G}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) (U + iV) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left( \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) = 0$$

ce qui implique que  $G$  est holomorphe et elle est une anti-dérivée de la fonction  $f$ . (Il est lassé au lecteur de tirer des conclusions pour le cas où  $\Delta(\vec{P}^*)$  et  $\Delta(\vec{Q}^*)$  sont exactes.)

On verra, dans le chapitre 5, comme variant du Théorème de Cauchy, que l'existence d'une anti-dérivée  $G$  suffit pour garantir que la valeur de  $\int_a^b F(z) dz$  est unique ce qui veut dire qu'elle ne dépend pas du chemin suivi entre  $a$  et  $b$ .

**Exemple 4.1.5** *Trouver, si possible, une anti-dérivée pour la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{C}$  par*

$$f(z) = e^x(x \cos y - y \sin y) + ie^x(x \sin y + y \cos y) .$$

**Solution**

Supposons qu'une anti-dérivée  $G = \phi + i\psi$  existe. Ceci veut dire que les deux formes différentielles doivent être exactes d'où on tire

$$\frac{\partial G}{\partial z} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = e^x(x \cos y - y \sin y) + ie^x(x \sin y + y \cos y)$$

Donc, les fonctions  $\phi$  et  $\psi$  doivent satisfaire les quatre équations

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = e^x(x \cos y - y \sin y), \quad \frac{\partial\psi}{\partial x} = e^x(x \sin y + y \cos y), \quad \frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

De la première équation on trouve que <sup>3</sup>

$$\begin{aligned} \phi(x, y) &= \int e^x(x \cos y - y \sin y) \partial x \\ &= \cos y \int e^x x \partial x - y \sin y \int e^x \partial x \\ &= e^x(x-1) \cos y - e^x y \sin y + A(y), \\ \psi(x, y) &= \int e^x(x \sin y + y \cos y) \partial x \\ &= \sin y \int e^x x \partial x + y \cos y \int e^x \partial x \\ &= e^x(x-1) \sin y + e^x y \cos y + B(y). \end{aligned}$$

Or, les conditions  $\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}$  et  $\frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$  (Cauchy-Riemann) entraînent  $\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dy} = 0$ . Donc, à une constante près

$$G = e^x[(x-1) \cos y - y \sin y] + ie^x[(x-1) \sin y + y \cos y].$$

Notons qu'en forme complexe ceci s'exprime comme  $G(z) = e^z(z-1)$ .

**Fin de l'exemple.**

**Exemple 4.1.6** *Montrer qu'aucune anti-dérivée n'existe pour la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{C}$  par*

$$f(z) = x^2 + y^2 + 2ixy.$$

**Solution**

Comme dans l'exemple précédent supposons qu'une anti-dérivée  $G = \phi + i\psi$  existe. Alors,

$$\frac{\partial G}{\partial z} = \frac{\partial\phi}{\partial x} + i \frac{\partial\psi}{\partial x} = x^2 + y^2 + 2ixy$$

et les quatre conditions suivantes doivent être satisfaites:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = x^2 + y^2, \quad \frac{\partial\psi}{\partial x} = 2xy, \quad \frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

<sup>3</sup>La notation  $\int h(x, y) \partial x$  veut dire une intégration formelle par rapport à la variable  $x$ . Au lieu de l'ajout d'une constante d'intégration après on ajoute une fonction « arbitraire » de  $y$  car cette variable est tenue constante pendant l'intégration.

Les deux premières conditions montrent qu'il faut que

$$\phi(x, y) = \frac{x^3}{3} + xy^2 + A(y) \quad \text{et} \quad \psi(x, y) = x^2y + B(y).$$

Les conditions de Cauchy-Riemann exigent que

$$\frac{dA}{dy} = 4xy \quad \text{et} \quad \frac{dB}{dy} = y^2.$$

La première de ces équations est contradictoire vu que  $A$  doit être une fonction de la *seule* variable  $y$ . Donc, aucune anti-dérivée n'existe pour  $f$ .

**Fin de l'exemple.**

Dans les sections qui suivent on établira une fondation plus solide pour l'intégrale complexe.

## 4.2 L'INTÉGRALE DE RIEMANN-STIELTJES.

L'intégrale complexe se définit en fonction de l'intégrale de Riemann-Stieltjes qu'on étudie dans les cours d'analyse réelle. Dans les deux prochaines sections de ce chapitre nous allons rappeler certaines propriétés de ces intégrales lesquelles sont importantes pour l'étude de l'intégrale complexe.

Si  $[a, b]$ , avec  $-\infty < a < b < \infty$  est un intervalle réel on note par  $Part([a, b])$  l'ensemble de toutes les partitions de  $[a, b]$ . (Voir le Chapitre 2.) Un élément  $P$  de  $Part([a, b])$  s'exprime comme

$$P : a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (4.7)$$

Soit  $f$  une fonction réelle bornée sur  $[a, b]$  et soit  $P$  la partition (4.7). On introduit la notation suivante

$$M_k = \sup_{t_{k-1} < t < t_k} f(t) \quad \text{et} \quad m_k = \inf_{t_{k-1} < t < t_k} f(t).$$

L'**oscillation**  $\Omega$  de  $f$  sur  $[a, b]$  est la différence

$$\Omega = \sup_{t \in [a, b]} f(t) - \inf_{t \in [a, b]} f(t).$$

L'**oscillation**  $\omega_k$  de  $f$  sur un sous-intervalle  $[t_{k-1}, t_k]$  de la partition est  $M_k - m_k \geq 0$ .

Soit  $g$  une fonction réelle non-décroissante sur  $[a, b]$  telle que  $-\infty < g(a) \leq g(b) < \infty$ . Si  $f$  et  $P$  sont comme ci-haut alors les **sommes supérieur et inférieur de Darboux-Stieltjes** se définissent par les formules

$$\bar{J}(f, g, P) = \sum_1^n M_k [g(t_k) - g(t_{k-1})]$$

et

$$\underline{J}(f, g, P) = \sum_1^n m_k [g(t_k) - g(t_{k-1})] .$$

La Figure 4.4 montre ces sommes pour une partition avec trois points intérieurs. Les rectangles foncés contribuent à la somme inférieure et les autres indiquent ce qu'il faut « ajouter » pour la somme supérieure.

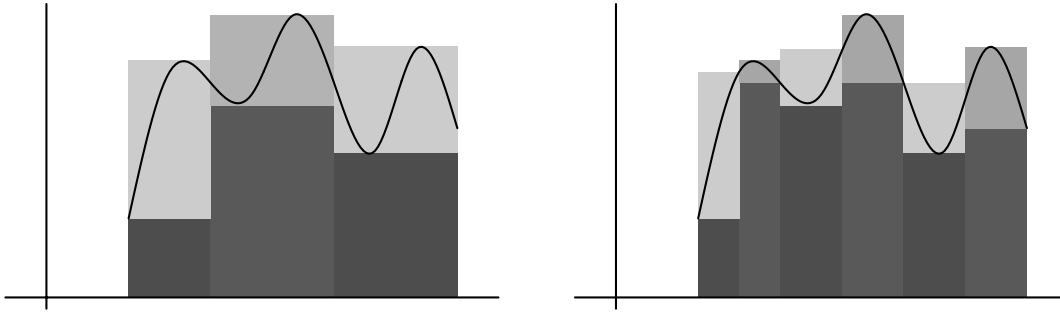


Figure 4.4: Sommes de Darboux-Stieltjes

Pour les deux lemmes qui suivent on suppose que  $f$  soit une fonction réelle bornée et que  $g$  soit une fonction non-décroissante sur  $[a, b]$ . De plus,  $P$  est une partition quelconque de  $[a, b]$ .

**Lemme 4.2.1** *Supposons qu'à partir de la partition donnée  $P$  on en forme une nouvelle  $P'$  en ajoutant  $n'$  nouveaux points à  $P$ . Alors, les inégalités suivantes sont valides:*

$$\bar{J}(f, g, P') \leq \bar{J}(f, g, P) \quad \text{et} \quad \underline{J}(f, g, P) \leq \underline{J}(f, g, P') .$$

### Démonstration

Il suffit d'examiner ce qui se passe dans un sous-intervalle  $[t_{k-1}, t_k]$  de la partition  $P$  auquel s'ajoute  $L - 1$ , ( $L \geq 2$ ) nouveaux points  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{L-1}$  tels que

$$t_{k-1} = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_{L-1} < \tau_L = t_k .$$

La partie de la somme  $\bar{J}(f, g, P)$  déterminée par cet intervalle est  $M_k[g(t_k) - g(t_{k-1})]$  tandis que la partie de la somme  $\bar{J}(f, g, P')$  due à ce même intervalle est

$$T_L = \sum_{j=1}^L M'_j [g(\tau_j) - g(\tau_{j-1})]$$

où  $M'_j = \sup_{\tau_{j-1} < t < \tau_j}$  pour  $j = 1, 2, \dots, L$ . Il est clair que

$$T_L \leq M_k \sum_{j=1}^L [g(\tau_j) - g(\tau_{j-1})] \leq M_k [g(\tau_L) - g(\tau_0)] = M_k [g(t_k) - g(t_{k-1})] .$$

En répétant ce même argument pour chaque sous-intervalle de  $P$  on obtient la première inégalité du lemme. L'autre se démontre de manière analogue.

**C.Q.F.D.** ■

**Lemme 4.2.2** *Si  $P$  et  $P'$  sont des partitions quelconques de  $[a, b]$  alors*

$$\underline{J}(f, g, P) \leq \overline{J}(f, g, P').$$

**Démonstration**

Formons la partition  $P'' = P \cup P'$ . Du Lemme IV.1.1, il s'ensuit que

$$\underline{J}(f, g, P) \leq \underline{J}(f, g, P'') \leq \overline{J}(f, g, P'') \leq \overline{J}(f, g, P')$$

**C.Q.F.D.** ■

Les **intégrales supérieure et inférieure de Darboux-Stieltjes** se définissent par

$$\overline{\int}_a^b f dg = \overline{\int}_a^b f(t) dg(t) = \inf_{P \in \text{Part}([a, b])} \overline{J}(f, g, P) \quad (4.8)$$

et

$$\underline{\int}_a^b f dg = \underline{\int}_a^b f(t) dg(t) = \sup_{P \in \text{Part}([a, b])} \underline{J}(f, g, P). \quad (4.9)$$

On dit que  $f$  est **intégrable par rapport à  $g$  sur  $[a, b]$**  si  $\overline{\int}_a^b f dg = \underline{\int}_a^b f dg$  et cette valeur commune s'appelle l'**intégrale de Riemann-Stieltjes de  $f$  par rapport à  $g$  sur  $[a, b]$** . Dans ce dernier cas on écrit  $\int_a^b f dg$ .

**Exemple 4.2.1** *Prouver que toute fonction réelle bornée  $f$  est intégrable par rapport à une constante  $c$ . De plus,*

$$\int_a^b f(t) dc = 0.$$

**Solution**

Si  $g(t) \equiv c$  alors, pour toute partition  $P$  de  $[a, b]$ , on a  $g(t_k) - g(t_{k-1}) = 0$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$  d'où  $\overline{J}(f, g, P) = \underline{J}(f, g, P) = 0$ . Donc, les intégrales supérieure et inférieure existent et sont égales à zéro.

**Fin de l'exemple.**

**Théorème 4.2.1** *Si  $f$  est une fonction réelle continue sur  $[a, b]$  avec  $-\infty < a < b < \infty$  et si  $g$  est non-décroissante sur  $[a, b]$  alors  $\int_a^b f dg$  existe.*

**Démonstration**

Comme  $f$  est continue sur l'intervalle  $[a, b]$ , qui est compact, elle y est uniformément continue. Donc, pour tout  $\epsilon > 0$  il existe  $\delta > 0$  tel que  $t_1, t_2 \in [a, b]$  avec  $|t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow |f(t_2) - f(t_1)| < \epsilon$ . Si on choisit

une partition de  $[a, b]$  pour laquelle la norme égale  $\max_{k=1,2,\dots,n} \{t_k - t_{k-1}\} < \delta$ , alors il doit suivre que  $M_k - m_k \leq \epsilon$  pour chaque sous-intervalle  $[t_{k-1}, t_k]$  de  $P$ . Donc,

$$\overline{J}(f, g, P) - \underline{J}(f, g, P) = \sum_1^n (M_k - m_k)[g(t_k) - g(t_{k-1})] \leq \epsilon \sum_1^n [g(t_k) - g(t_{k-1})] = \epsilon[g(b) - g(a)].$$

Des Lemmes 4.2.1 et 4.2.2, il résulte que

$$\underline{J}(f, g, P) \leq \int_a^b f dg \leq \overline{J}(f, g, P)$$

d'où

$$\left| \overline{J}(f, g, P) - \int_a^b f dg \right| \leq \left| \overline{J}(f, g, P) - \underline{J}(f, g, P) \right| \leq \epsilon[g(b) - g(a)].$$

La valeur de  $\epsilon$  étant arbitraire il s'ensuit que

$$\int_a^b f dg = \overline{J}(f, g, P).$$

**C.Q.F.D.** ■

Si, dans ce théorème on prend  $g(t) = t$  on obtient le fait, bien connu, que l'intégrale de Riemann d'une fonction continue sur un intervalle fini existe.

### 4.3 L'INTÉGRALE: FONCTIONS À VARIATION BORNÉE.

Avant d'aborder le sujet principal de cette section nous devons définir et établir quelques propriétés des fonctions à variation bornée.

Soient  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$  et  $Part([a, b])$  l'ensemble de toutes les partitions de  $[a, b]$ . Si  $P \in Part([a, b])$  et si  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , définissons

$$B(g, P) = \sum_1^n |g(t_k) - g(t_{k-1})|$$

et

$$V(g; a, b) = \sup_{P \in Part([a, b])} B(g, P).$$

La fonction  $g$  est dite à **variation bornée sur**  $[a, b]$  si et seulement si  $V(g; a, b) < \infty$ . Dans ce cas  $V(g; a, b)$  s'appelle la **variation totale** de  $g$  sur  $[a, b]$ . On note par  $Var([a, b])$  l'ensemble de toutes les fonctions (réelles) à variation bornée sur  $[a, b]$ . Il est évident que toute fonction monotone  $h \in Var([a, b])$  et que  $V(h; a, b) = |h(b) - h(a)|$ .

**Exemple 4.3.1** Une fonction à variation bornée est-elle nécessairement continue?

**Solution**

**Non.** Considérons la fonction  $g$  définie sur  $[0, 2]$  par

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ -1 & \text{si } 1 < x < 2 \end{cases}$$

Il est clair que  $g$  a une discontinuité pour  $x = 1$ . Mais peu importe la partition  $P$  de l'intervalle  $[0, 1]$ ,  $B(g, P) = 2$ . Donc  $V(g; 0, 2) = 2$ .

**Fin de l'exemple.**

**Lemme 4.3.1**  $Var([a, b])$  est un espace linéaire.

**Démonstration**

Si  $g_1, g_2 \in Var([a, b])$  et si  $P \in Part([a, b])$  alors

$$B(g_1 + g_2, P) \leq B(g_1, P) + B(g_2, P) \leq V(g_1; a, b) + V(g_2; a, b)$$

d'où

$$V(g_1 + g_2; a, b) \leq V(g_1; a, b) + V(g_2; a, b).$$

Donc  $g_1 + g_2 \in Var([a, b])$ . Si  $c \in \mathbb{R}$  il est clair que  $V(cg; a, b) = |c|V(g; a, b)$  lorsque  $g \in Var([a, b])$  d'où  $cg \in Var([a, b])$ .

**C.Q.F.D.** ■

Or, supposons que  $[c, d] \subseteq [a, b]$  et  $g \in Var([a, b])$ .  $P \in Part([c, d])$  étant donné, on peut l'étendre pour qu'elle devienne une partition de  $[a, b]$  en ajoutant, si nécessaire, les points  $a$  et  $b$ . C'est-à-dire  $P' = P \cup \{a, b\} \in Part([a, b])$ . On voit que

$$|g(c) - g(a)| + |g(d) - g(b)| + B(g, P) = B(g, P') \leq V(g; a, b).$$

Donc, la restriction de  $g$  à l'intervalle  $[c, d]$ ,  $g|_{[c, d]} \in Var([c, d])$  et  $V(g; c, d) \leq V(g; a, b)$ . en particulier, si  $a < x \leq y < b$ ,  $V(g; a, x) \leq V(g; a, y)$ .

**Lemme 4.3.2** Supposons que  $g \in Var([a, b])$  et que  $c \in (a, b)$ . Alors

$$V(g; a, b) = V(g; a, c) + V(g; c, b)$$

**Démonstration**

Supposons que  $P_1 \in Part([a, c])$  et  $P_2 \in Part([c, b])$  de sorte que  $P_1 \cup P_2 \in Part([a, b])$ . Alors

$$B(g, P_1) + B(g, P_2) = B(g, P_1 \cup P_2) \leq V(g; a, b). \quad (4.10)$$

Cependant, étant donné  $P \in \text{Part}([a, b])$ , formons  $P^* = P \cup \{c\}$ . Évidemment, il existe  $P_1, P_2 \in \text{Part}([a, b])$  telles que  $P_1 \cup P_2 = P^*$ . Alors,

$$B(g, P) \leq B(g, P^*) = B(g, P_1) + B(g, P_2) \leq V(g; a, c) + V(g; c, b)$$

d'où

$$V(g; a, b) \leq V(g; a, c) + V(g; c, b) \quad (4.11)$$

De l'inégalité (4.10) on déduit que

$$V(g; a, c) + V(g; c, b) \leq V(g; a, b) \quad (4.12)$$

et le résultat suit immédiatement de (4.11) et (4.12).

**C.Q.F.D.** ■

**Théorème 4.3.1** . *Si  $g \in \text{Var}([a, b])$  alors il existe deux fonctions non-décroissantes et non-négatives  $g_1$  et  $g_2$  définies sur  $[a, b]$  telles que  $g = g_1 - g_2$ .*

**Démonstration**

Si  $g \in \text{Var}([a, b])$ , choisissons  $K > 0$  tel que  $g(a) + K \geq 0$ . Définissons  $g_1$  et  $g_2$  comme

$$g_1(x) = g(a) + K + V(g; a, x) \quad , \quad g_2(x) = g(a) + K + V(g; a, x) - g(x) .$$

Il est clair que  $g_1(x)$  est non-décroissante et non-négative et que  $g(x) = g_1(x) - g_2(x)$ . De plus,  $g_2(a) = K > 0$ . Si  $a \leq x \leq y \leq b$  alors

$$g_2(y) - g_2(x) = V(g; a, y) - V(g; a, x) - [g(y) - g(x)] = V(g; x, y) - [g(y) - g(x)] \geq 0 .$$

Donc,  $g_2(x)$  est non-décroissante et non-négative.

**C.Q.F.D.** ■

On remarque que la décomposition d'une fonction à variation bornée du type décrit dans ce théorème n'est pas unique. En fait, si  $g = g_1 - g_2$  est une telle décomposition alors pour toute constante  $c$  (réelle)  $g = (g_1 + c) - (g_2 + c)$  en serait une autre.

**Théorème 4.3.2** *Si  $f$  est une fonction réelle continue sur  $[a, b]$  et si  $g \in \text{Var}([a, b])$  admet deux décompositions du type décrit dans le Théorème 4.3.1, disons  $g = g_1 - g_2$  et  $g = g_3 - g_4$  alors*

$$\int_a^b f dg_1 - \int_a^b f dg_2 = \int_a^b f dg_3 - \int_a^b f dg_4 .$$

**Démonstration**

On voit que  $g_1 + g_4 = g_2 + g_3$  sont des fonctions non-décroissantes sur  $[a, b]$ . Donc

$$\int_a^b f(t) d[g_1(t) + g_4(t)] \quad \text{et} \quad \int_a^b f(t) d[g_2(t) + g_3(t)]$$

existent. De plus,

$$I_1 = \int_a^b f d[g_1 + g_2] = \int_a^b f dg_1 + \int_a^b f dg_2$$

et

$$I_2 = \int_a^b f d[g_2 + g_3] = \int_a^b f dg_2 + \int_a^b f dg_3.$$

Mais  $I_1 = I_2$  et le résultat en découle immédiatement.

**C.Q.F.D.** ■

À cause de ce théorème, si  $f$  est continue sur  $[a, b]$  et si  $g \in \text{Var}([a, b])$  de telle sorte que  $g = g_1 - g_2$  est une décomposition de  $g$  comme différence de deux fonctions non-décroissantes et non-négatives, on définit l'**intégrale de Riemann-Stieltjes** comme

$$\int_a^b f dg = \int_a^b f dg_1 - \int_a^b f dg_2$$

Les Théorèmes 4.3.1 et 4.3.2 nous garantissent que cette intégrale existe et qu'elle soit bien-définie.

**Théorème 4.3.3** *Supposons que  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  soit continue et que  $g \in \text{Var}([a, b])$ . Alors,*

1) *Si  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$*

$$\int_a^b f dg = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} f dg.$$

2) *Si  $\phi : [c, d] \rightarrow [a, b]$  est strictement croissante et continue alors*

$$\int_a^b f dg = \int_c^d (f \circ \phi) d(f \circ \phi).$$

3) *Si  $g$  est continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $(a, b)$ , à part possiblement d'un nombre fini de points, et si  $g'(x)$  est bornée et continue, alors*

$$\int_a^b f dg = \int_a^b f(x) dg(x) = \int_a^b f g' dx = \int_a^b f(x) g'(x) dx.$$

### Démonstration

Il suffit d'établir ce théorème pour le cas où  $g$  est non-décroissante.

1) On prouve cette partie du résultat pour la partition  $a < c < b$ , le cas général se vérifie de manière analogue. Si  $P_1 \in \text{Part}([a, c])$  et  $P_2 \in \text{Part}([c, b])$  alors  $P_1 \cup P_2 \in \text{Part}([a, b])$  et

$$\int_a^b f dg \leq \bar{J}(f, g, P_1 \cup P_2) = \bar{J}(f, g, P_1) + \bar{J}(f, g, P_2).$$

Donc,

$$\int_a^b f dg \leq \int_z^c f dg + \int_c^b f dg.$$

De façon semblable, on voit que

$$\int_a^b f dg \geq \underline{J}(f, g, P_1 \cup P_2) = \underline{J}(f, g, P_1) + \underline{J}(f, g, P_2)$$

d'où

$$\int_a^b f dg \geq \int_a^c f dg + \int_c^b f dg$$

ce qui complète la démonstration de 1).

2) Comme  $\phi$  est continue et strictement croissante, on trouve que  $f \circ \phi$  est non-décroissante. Il s'ensuit que  $f \circ \phi$  est intégrable par rapport à  $g \circ \phi$ . Étant donné  $P \in \text{Part}([c, d])$  avec  $c = t_0 < t_1 < \dots < t_n = d$ , posons

$$\phi(P) = \{\phi(t_j), j = 1, 2, \dots, n\}.$$

Il est clair que  $\phi(P) \in \text{Part}([a, b])$ .

Réciproquement, si  $\{x_j : j = 0, 1, \dots, n\} \in \text{Part}([a, b])$  alors  $\{\phi^{-1}(x_j) : j = 0, 1, \dots, n\} \in \text{Part}([c, d])$ .

Donc, la correspondance  $P \rightarrow \phi(P)$  est une bijection entre  $\text{Part}([c, d])$  et  $\text{Part}([a, b])$ . Comme

$$\bar{J}(f, g, \phi(P)) = \bar{J}(f \circ \phi, g \circ \phi, P), \quad P \in \text{Part}([c, d])$$

on voit que

$$\int_a^b f dg = \inf_{P \in \text{Part}([c, d])} \bar{J}(f, g, \phi(P)) = \inf_{P \in \text{Part}([c, d])} \bar{J}(f \circ \phi, g \circ \phi, P) = \int_c^d (f \circ \phi) d(g \circ \phi).$$

3) À cause de 1) on peut supposer que  $g$  soit dérivable sur  $(a, b)$  avec  $g'$  bornée et continue. Ceci veut dire que  $fg'$  est bornée sur  $[a, b]$  et continue en chaque point, à part possiblement de  $a$  et  $b$ . Donc,  $fg'$  est intégrable, dans le sens de Riemann, sur  $[a, b]$ . Si  $[t_{k-1}, t_k] \subseteq [a, b]$ . Il résulte du Théorème de la moyenne qu'il existe  $\xi_k \in (t_{k-1}, t_k)$  tel que

$$g(t_k) - g(t_{k-1}) = g'(\xi_k)[t_k - t_{k-1}]$$

d'où

$$\bar{J}(f, g, P) \leq \bar{J}(fg', i, P) \quad \text{où} \quad i(t) = t$$

De façon semblable, on démontre que

$$\underline{J}(f, g, P) \geq \underline{J}(fg', i, P)$$

Il s'ensuit que

$$\int_a^b f dg = \int_a^b fg' di = \int_a^b f(t) g'(t) dt$$

**C.Q.F.D.** ■

## 4.4 ARCS ORIENTÉS, COURBES SIMPLES ET CONTOURS.

Dans cette section on continue l'étude de la théorie des courbes commencée dans le Chapitre 2. Les concepts qui seront introduits ici sont importants pour comprendre les véritables différences entre l'intégrale réelle et l'intégrale complexe.

Si  $\Gamma$  est un arc du plan complexe, il est intuitivement clair qu'il existe deux « directions » définies sur lui et pour les distinguer il suffit de spécifier le « premier point » sur  $\Gamma$  pour chacune d'elles. Par exemple, si  $\Gamma$  est représenté par  $g \in \text{Hom}([0, 1], \Gamma)$  on peut dire que  $z_0 = g(0) \in \Gamma$  est le premier point pour une des directions et que  $z_1 = g(1)$  l'est pour l'autre.

**Exemple 4.4.1** *Considérons le demi-cercle  $\Gamma \in \mathbb{C}$  lequel est défini implicitement par*

$$\Gamma = \{z = x + iy : x^2 + y^2 = 1 : x \geq 0\}.$$

*Si nous voulons une description de l'arc  $\Gamma$  avec  $(1, 0)$  comme le « premier point » il suffit de choisir la fonction  $g_1 : [0, 1] \rightarrow \Gamma$  définie par  $g_1(t) = \cos \pi t + i \sin \pi t$  et de convenir que le premier point correspond toujours à la première valeur (0 ici) de la paramètre. Puis, lorsque  $t$  croît de 0 à 1 le point mobile décrit  $\Gamma$  dans une des deux directions.*

*Par contre, si nous voulons que  $(-1, 0)$  soit le « premier point » nous pouvons choisir la fonction  $g_2 : [0, 1] \rightarrow \Gamma$  définie par  $g_2(t) = \cos(\pi - t) + i \sin(\pi - t)$  et  $g_2(0)$  produit le point  $(-1, 0)$  et l'on parcourt l'arc dans la deuxième direction.*

**Fin de l'exemple.**

On dit que  $g \in \text{Hom}([0, 1], \Gamma)$  représente l'**arc orienté**  $(\Gamma, z_0)$  si  $g(0) = z_0$ .

Rappelons que  $M = \text{Hom}([0, 1], [0, 1])$  et que les fonctions de  $M$  sont monotones. Si  $M_+$  est l'ensemble des fonctions non-décroissantes de  $M$  et  $M_-$  celui des fonctions non-croissantes alors  $M = M_+ \cup M_-$  et  $M_+ \cap M_- = \emptyset$ .

Si  $(\Gamma, z_0)$  est un arc orienté représenté par  $g \in \text{Hom}([0, 1], \Gamma)$  et si  $\phi \in M_+$  alors  $g \circ \phi$  représente  $(\Gamma, z_0)$ . Si  $\chi \in M_-$  alors  $\chi \circ g$  représente  $(\Gamma, z_1)$  où  $z_1 = g(1)$  est le point final de  $(\Gamma, z_0)$ . Évidemment,  $(\Gamma, z_0)$  et  $(\Gamma, z_1)$  sont les deux arcs orientés qu'on forme à partir de  $\Gamma$ . Parfois on écrit  $(\Gamma, z_1) = -(\Gamma, z_0)$ .

Un arc orienté peut être représenté par des fonctions définies sur un intervalle  $[a, b]$  différent de  $[0, 1]$ . Dans ce cas on dit que  $\xi \in \text{Hom}([a, b], \Gamma)$  représente  $(\Gamma, z_0)$  si  $\xi(a) = z_0$ .

Parfois on écrit, simplement,  $\Gamma$  (ou  $\Gamma^+$ ) pour un arc orienté. Si  $\Gamma$  est donné avec une orientation on écrit  $-\Gamma$  (ou  $\Gamma^-$ ) pour l'orientation opposée.

Or, supposons que  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  soient deux arcs tels que  $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \{z_1\}$  et que ce point  $z_1$  est le point initial ou final de  $\Gamma_1$  et aussi qu'il est soit le point initial soit le point final de  $\Gamma_2$ . Si  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$  alors  $\Gamma$  est un arc. Pour ce voir, supposons que  $z_0$  soit l'autre extrémité de  $\Gamma_1$ . Choisissons  $g_1 \in \text{Hom}([0, 1], \Gamma_1)$  représentant  $(\Gamma_1, z_0)$  et  $g_2 \in \text{Hom}([0, 1], \Gamma_2)$  représentant  $(\Gamma_2, z_1)$ . On peut définir

$$g(t) = \begin{cases} g_1(t), & \text{si } t \in [0, 1]; \\ g_2(t), & \text{si } t \in [1, 2]. \end{cases}$$

Il est clair que  $g \in \text{Hom}([0, 2], \Gamma)$ . Donc,  $\Gamma$  est un arc.

Une **courbe fermée simple**  $\Gamma$  est une partie de  $\mathbb{C}$  homéomorphe au cercle unitaire  $S = \{z : |z| = 1\}$ . C'est à dire qu'il existe une correspondance bicontinue  $h$  telle que  $S \xrightarrow{h} \Gamma$

**Exemple 4.4.2** *Montrer que tout cercle non-dégénéré du plan est une courbe fermée simple.*

**Solution**

Soit  $\Gamma$  un cercle centré au point  $z_0$  et de rayon  $r > 0$ . Ce cercle est défini par l'équation complexe  $|z - z_0| = r$ . Maintenant, considérons la correspondance  $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  définie par  $z \mapsto Z = z_0 + rz$  qui est évidemment bicontinu. Alors,

$$|z| = 1 \mapsto \frac{1}{r}|Z - z_0| \Rightarrow |Z - z_0| = r$$

Donc,  $S \xrightarrow{h} \Gamma$

D'ordinaire, il nous convient de représenter une courbe fermée simple par des fonctions définies sur  $S$ , mais on peut toujours trouver des fonctions définies sur  $[0, 1]$  qui déterminent cette même courbe en utilisant la correspondance naturelle entre  $[0, 1]$  et  $S$  définie par

$$\omega(t) = e^{2\pi it}$$

qui est une injection pour  $t \in [0, 1)$ . Si  $\theta$  est un argument de  $\omega$  tel que  $0 < \theta \leq 2\pi$ , alors la fonction

$$t(\omega) = \frac{1}{2\pi i} (\log |\omega| + i\theta)$$

est l'inverse de  $\omega(t)$ . La restriction de cette fonction au cercle  $S$  se notera par  $\lambda(\omega)$ . Comme  $|\omega| = 1$  sur  $S$ , on voit que  $\lambda(\omega) = \theta/2\pi$  où  $0 < \theta \leq 2\pi$ .

On accepte le résultat suivant sans démonstration.

**Théorème 4.4.1** *Une partie  $\Gamma$  du plan complexe est une courbe fermée simple si et seulement si il existe une fonction continue  $h$ , définie sur  $[0, 1]$  telle que  $h([0, 1]) = \Gamma$ ,  $h(0) = h(1)$  et la restriction de  $h$  à l'intervalle  $[0, 1)$  est une injection.*

Soit  $C[0, 1]$  l'ensemble de toutes les fonctions continues sur  $[0, 1]$ . Si  $\Gamma$  est une courbe fermée simple on dit que  $h \in C[0, 1]$  **représente**  $\Gamma$  si  $h(t)$  est une injection lorsque  $t \in [0, 1]$  avec  $h([0, 1]) = \Gamma$  et  $h(0) = h(1)$ . Par le Théorème 4.4.1 on sait qu'il existe une correspondance biunivoque entre les fonctions  $h$  qui représente  $\Gamma$  et les homéomorphismes  $g$  entre  $S$  et  $\Gamma$ , cette correspondance étant déterminée par  $h = g \circ \omega$ .

Si  $z \in \Gamma$  on peut choisir  $h$  telle que  $h(0) = z$ . Car, supposons que  $g \in \text{Hom}(S, \Gamma)$  et que  $g^{-1}(z) = \omega(0)$ . Posons  $h(t) = g(\omega(t + \theta))$ ,  $t \in [0, 1]$ . Alors,  $h(0) = h(1) = z$  et du Théorème 4.4.1, il résulte que  $h$  représente  $\Gamma$ .

Si on prend deux points d'un cercle ils divisent le cercle en deux arcs. On devrait retrouver la même chose pour une courbe fermée simple. La démonstration du théorème suivant est laissée en exercice.

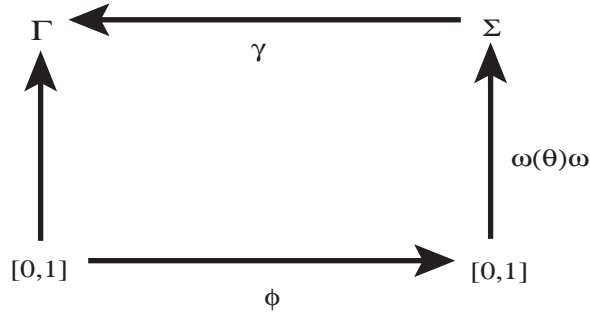


Figure 4.5:

**Théorème 4.4.2** Soit  $\Gamma$  une courbe fermée simple et soient  $z_1, z_2$  des points distincts de  $\Gamma$ . Il existe des arcs  $\Gamma_1, \Gamma_2$  tels que  $z_1, z_2$  soient leurs extrémités et

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \quad , \quad \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \{z_1, z_2\}$$

Réciproquement, si  $\Gamma_1, \Gamma_2$  sont deux arcs tels que  $z_1, z_2$  ( $z_1 \neq z_2$ ) en soient les extrémités et  $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \{z_1, z_2\}$  alors  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$  est une courbe fermée simple.

Quand une courbe fermée simple est décomposée comme dans ce théorème cette décomposition est dite **simple**. Il est évident qu'il existe une correspondance biunivoque entre les décompositions simples et les couples de points distincts de cette courbe. Il va de soi que ce résultat se généralise pour n'importe quel nombre fini de points distincts.

À cause du Théorème 4.4.2, on peut construire des courbes fermées simples à partir de plusieurs arcs. Par exemple, la réunion d'un demi-cercle et d'un diamètre ou la réunion de trois segments pour former un triangle.

Nous acceptons le résultat suivant sans démonstration.

**Théorème 4.4.3** Si  $\Gamma$  est une courbe fermée simple et si  $g \in \text{Hom}(S, \Gamma)$  alors l'ensemble de toutes les fonctions qui représente  $\Gamma$  se compose des fonctions  $h$  telles que

$$h(t) = g[\omega(\theta + \phi(t))] \quad , \quad t \in [0, 1] \quad , \quad \theta \in [0, 1]$$

où  $\phi \in M = \text{Hom}([0, 1], [0, 1])$ .

La situation décrite dans ce théorème peut être illustrée par la Figure 4.5.

Soit  $\Gamma$  une courbe fermée simple. Si  $\gamma \in \text{Hom}([0, 1], \Gamma)$  on définit

$$[\gamma] = \{g \circ \omega(\theta)\omega \circ \phi : \theta \in [0, 1), \phi \in M_+\}$$

où  $g \in \text{Hom}(S, \Gamma)$  est telle que  $\gamma = g \circ \omega$ . Notons par  $\gamma_-$  la fonction  $\omega_- = \gamma \circ \alpha$  où  $\alpha(t) = 1 - t$ ,  $t \in [0, 1]$ . Dans cette section, il est possible de prouver que

- 1)  $[\gamma] \cap [\gamma_-] = \emptyset$  et  $[\gamma] \cup [\gamma_-]$  est l'ensemble des fonctions qui représentent  $\Gamma$ .
- 2) Si  $\gamma$  et  $\lambda$  représentent  $\Gamma$  alors  $\{[\lambda], [\lambda_-]\} = \{[\gamma], [\gamma_-]\}$

À cause de ces deux propriétés, les fonctions qui représentent  $\Gamma$  forment deux classes  $[\gamma]$  et  $[\gamma_-]$  et, de plus, chaque fonction qui représente  $\Gamma$  induit ces deux mêmes classes. On dit que chacune des classes  $[\gamma]$  et  $[\gamma_-]$  représente une **direction** sur la courbe, ces deux directions étant considérées opposées. Ce qui plus est, la direction  $[\gamma]$  est déterminée par n'importe quelle fonction de  $[\gamma]$ . Le couple  $(\Gamma, [\gamma])$ , s'appelle **courbe fermée simple orientée**. Parfois,  $(\Gamma, [\gamma])$  sera notée simplement par  $\Gamma$ , mais il y a toujours une direction particulière sous-entendue.

**Exemple 4.4.3** *Considérons le cercle unitaire  $S$  qui peut être représenté par  $\omega : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  où  $\omega(t) = e^{2\pi i t}$ . Alors,*

$$[\omega] = \{\omega(\theta)\omega \circ \phi : \theta \in [0, 1], \phi \in M_+\}$$

*Lorsque  $t$  parcourt  $[0, 1]$  de 0 à 1,  $\phi(t)$  traverse  $[0, 1]$  dans le même sens. Donc,*

$$\omega(\theta + \phi(t)) = e^{2\pi i(\theta + \phi(t))}$$

*commence au point  $e^{2\pi i \theta}$  et lorsque  $t$  varie de 0 à 1, le point  $\omega(\theta + \phi(t))$  traverse le cercle en sens inverse des aiguilles d'une montre. Un exemple d'une fonction de  $[\omega]$  peut être construit en prenant  $\phi(t) = t^2$ . Il est clair que  $\phi \in M_+$ . Si  $\theta = 1/4$ , on voit que*

$$f(t) = e^{\frac{\pi i}{2} + it^2} \in [\omega]$$

*Ici,  $f(t)$  décrit  $S$  à partir de  $z = i$ .*

#### **Fin de l'exemple.**

Un **contour fermé** est une courbe fermée simple orientée construite d'un nombre fini d'arcs réguliers orientés. Les courbes de ce type jouent un rôle fondamentale en analyse complexe.

Le Théorème 4.4.2 peut être généralisé pour le cas d'une décomposition d'un contour fermé. On acceptera ce fait sur une base intuitive.

Il semble évident que si  $\Gamma$  est un contour fermé et si  $z \in \mathbb{C}$ , mais  $z \notin \Gamma$ , alors ce point se retrouve soit à l'« intérieur » soit à l'« extérieur » de  $\Gamma$ . À vrai dire ce fait exige une démonstration. Malheureusement, la preuve du théorème suivant est extrêmement difficile et ne peut être donnée ici.

**Théorème 4.4.4 (Jordan)** *Si  $\Gamma$  est une courbe fermée simple alors  $\mathbb{C} - \Gamma$  possède deux composantes  $D_1$  et  $D_2$  telles qu'une d'elles, disons  $D_1$ , soit bornée, et s'appelle l'intérieur de  $\Gamma$  et l'autre n'est pas bornée et s'appelle l'extérieur de  $\Gamma$ . De plus  $\Gamma$  est à la fois la frontière de  $D_1$  et de  $D_2$ . Selon la convention que nous avons adoptée  $D_1 = \Gamma^\circ$ .*

Une démonstration de ce théorème peut être trouvée dans le livre « The Taylor Series » de P. Dienes (DOVER publications).

## 4.5 L'INTÉGRALE COMPLEXE.

Rappelons qu'une fonction  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  ( $[a, b] \in \mathbb{R}$ ) est à variation bornée si et seulement si

$$V(g; a, b) = \sup_{P \in \text{Part}([a, b])} B(g, P) < \infty$$

où

$$B(g, P) = \sum_1^n |g(t_k) - g(t_{k-1})| \quad , \quad P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}.$$

C'est un exercice facile à vérifier qu'une telle fonction  $g = g_1 + ig_2$  est à variation bornée si et seulement si chacune des fonctions réelles  $g_1, g_2$  l'est.

Maintenant, si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  est continue sur  $[a, b]$  et si  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  est à variation bornée, on définit l'**intégrale de Riemann-Stieljes de  $f$  par rapport à  $g$**  comme

$$\int_a^b f dg = \int_a^b f_1 dg_1 - \int_a^b f_2 dg_2 + i \int_a^b f_1 dg_2 + i \int_a^b f_2 dg_1$$

où  $f = f_1 + if_2$  et  $g = g_1 + ig_2$ . Il est clair, de par des résultats précédents, que chacune des intégrales à droite existe de sorte que  $\int_a^b f dg$  soit bien définie.

Pour le reste de cette section on suppose que  $\Gamma$  représente soit un arc orienté régulier par morceaux, soit un contour fermé. Dans les deux cas  $\gamma$  est une fonction qui représente  $\Gamma$  (c-à-d  $\gamma \in \text{Hom}([0, 1], \Gamma)$ ). La fonction  $\gamma$  doit être dérivable sur  $(0, 1)$ , à part possiblement d'un nombre fini de points, et  $\gamma'$  doit être bornée et continue. Si  $f$  est une fonction complexe continue en chaque point de  $\Gamma$  alors la fonction composée  $f \circ \gamma$  est continue en chaque point de  $[0, 1]$  et comme  $\gamma \in \text{Var}([0, 1])$  on trouve que  $f \circ \gamma$  est intégrable par rapport à  $\gamma$ . On démontre facilement que le Théorème 4.3.3 s'applique quand  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  et  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ .

Supposons que  $\Gamma$  soit un arc orienté régulier par morceaux. Si  $\gamma_1$  est une fonction autre que  $\gamma$  qui représente  $\Gamma$  alors  $\gamma_1 = \gamma \circ \phi$  où  $\phi \in M_+$ . Il résulte du Théorème 4.3.3 de la section 3 que

$$\int_0^1 (f \circ \gamma_1) d\gamma_1 = \int_0^1 (f \circ \gamma) d(\gamma \circ \phi) = \int_0^1 (f \circ \gamma) d\gamma.$$

Supposons, maintenant, que  $\Gamma$  soit un contour fermé simple et que  $\gamma = g \circ \omega$  où  $\omega = e^{2\pi it}$  et  $g \in \text{Hom}(S, \Gamma)$ . Si  $\gamma_1$  est une autre fonction représentant  $\Gamma$  alors  $\gamma_1 = g \circ \omega(\theta) \omega \circ \phi$  où  $\phi \in M_+$  et  $0 \leq \theta < 1$ . Posons  $h = g \circ \omega(\theta) \omega \in \text{Var}([0, 1])$ . En appliquant le Théorème 4.3.3 de la section 3, (1) et (2), on trouve que

$$\begin{aligned} \int_0^1 (f \circ \gamma_1) d\gamma_1 &= \int_0^1 (f \circ h \circ \phi) d(h \circ \phi) \\ &= \int_0^1 (f \circ h) dh \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{1-\theta} (f \circ g \circ \omega(t+\theta)) d(g \circ \omega(t+\theta)) + \int_{1-\theta}^1 (f \circ g \circ \omega(t+\theta)) d(g \circ \omega(t+\theta)) \\
&= \int_\theta^1 (f \circ g \circ \omega(\mu)) d(g \circ \omega(\mu)) + \int_0^\theta (f \circ g \circ \omega(v)) d(g \circ \omega(v)) \\
&= \int_0^1 (f \circ g \circ \omega) d(g \circ \omega) \\
&= \int_0^1 (f \circ \omega) d\gamma.
\end{aligned}$$

Donc, si  $\Gamma$  est un arc orienté régulier ou un contour fermé simple et si  $\gamma \in \text{Hom}([0, 1], \Gamma)$  alors l'intégrale  $\int_0^1 (f \circ \gamma) d\gamma$  a une valeur indépendante de la fonction  $\gamma$  représentant  $\Gamma$ . Pour cette raison on définit l'intégrale de la fonction  $f$  le long de la courbe par

$$\int_\Gamma f(z) dz = \int_0^1 (f \circ \gamma) d\gamma$$

où  $\gamma$  est n'importe quelle fonction qui représente  $\Gamma$ . À cause du Théorème 4.3.3 (3) de la section 3, on voit que

$$\int_\Gamma f(z) dz = \int_0^1 (f \circ \gamma) \gamma' dt = \int_0^1 [f \circ \gamma(t)] [\gamma'(t)] dt$$

de telle sorte que  $\int_\Gamma f(z) dz$  se réduit à une intégrale de Riemann.

Le lecteur devrait comprendre à ce point pourquoi nous avons accordé tant d'importance aux concepts d'arc régulier et de contour fermé simple.

Dans plusieurs situations, on préfère, au lieu de l'intervalle  $[0, 1]$ , d'utiliser l'intervalle  $[a, b]$ . Si  $\lambda$  est continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $(a, b)$ , sauf pour un nombre fini de points, posons

$$u(t) = (1-t)a + b, \quad t \in [0, 1]$$

et il suit que  $\lambda \circ u$  représente  $\Gamma$ . Du Théorème 4.3.3 on a

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma f(z) dz &= \int_0^1 (f \circ \lambda \circ u) d(\lambda \circ u) = \int_a^b (f \circ h) d\lambda = \\
&= \int_a^b (f \circ \lambda) \lambda' = \int_a^b f \circ \lambda(t) \lambda'(t) dt.
\end{aligned}$$

**Exemple 4.5.1** Si  $S$  est le cercle unitaire (centré à l'origine) trouver la valeur de  $\int_S (1/z) dz$  où  $S$  représente le cercle avec l'orientation « positive ».

**Solution**

Le contour fermé simple peut être représenté par  $\omega(t) = e^{2\pi it}$ ,  $t \in [0, 1]$ . On trouve que

$$\int_{S^+} \frac{dz}{z} = \int_0^1 e^{-2\pi it} de^{2\pi it} = 2\pi i \int_0^1 dt = 2\pi i.$$

**Fin de l'exemple.**

Sous les mêmes conditions utilisées pour définir  $\int_{\Gamma} f(z) dz$ , il est utile de définir  $\int_{\Gamma} f(z) d\bar{z}$ . Cette dernière se définit comme suit

$$\int_{\Gamma} f(z) d\bar{z} = \int_0^1 (f \circ \gamma) d\bar{\gamma} = \int_0^1 [f \circ \gamma(t)] d\bar{\gamma}(t)$$

On démontre, comme avant, que la valeur de cette intégrale est indépendante de la fonction que représente  $\Gamma$ .

**Exemple 4.5.2** Trouver la valeur de  $\int_{\Gamma} \bar{z} dz + z d\bar{z}$  où  $\Gamma$  est

- Le segment qui relie  $(0, 0)$  et  $(1, 1)$ .
- Les segments qui relient  $(0, 0)$  à  $(1, 0)$  et  $(1, 0)$  à  $(1, 1)$ .

**Solution**

a) Ici l'arc peut s'exprimer par  $z(t) = (1 + i)t$ ,  $t \in [0, 1]$ . Alors

$$\int_{\Gamma} \bar{z} dz + z d\bar{z} = 2 \int_0^1 t(1 + i)(1 - i) dt = 4 \int_0^1 t dt = 2.$$

b) Ici  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$  où  $\Gamma_1$  correspond à  $z(t) = t$ ,  $t \in [0, 1]$  et  $\Gamma_2$  est représenté par  $z(t) = 1 + it$ ,  $t \in [0, 1]$ .  
Donc

$$\int_{\Gamma} \bar{z} dz + z d\bar{z} = \int_0^1 2t dt + \int_0^1 (1 - it)i dt - \int_0^1 (1 + it)i dt = 2.$$

En fait, la valeur de cette intégrale reste inchangée pour n'importe quelle courbe rectifiable entre  $(0, 0)$  et  $(1, 1)$ . On verra une preuve de cela plus loin.

**Fin de l'exemple.**

**Exemple 4.5.3** Si  $C(z_0, r)$  est le cercle défini par  $|z - z_0| = r$ , évaluer  $\int_C (z - z_0)^m dz$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ .

**Solution**

Il est clair que  $C$  a comme équation paramétrique

$$z(t) = z_0 + r(\cos t + i \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

et lorsque  $t$  croît entre 0 et  $2\pi$ , le cercle  $C(z_0, r)$  est décrit dans le sens positif. Alors,

$$\begin{aligned} \int_{C(z_0, r)} (z - z_0)^m dz &= \int_0^{2\pi} r^m [\cos t + i \sin t]^m r [-\sin t + i \cos t] dt = \\ &= r^{m+1} \int_0^{2\pi} [-\sin(m+1)t + i \cos(m+1)t] dt \end{aligned}$$

Cependant,

$$\int_0^{2\pi} \sin Nt dt = 0, \quad \text{pour tout } N \in \mathbb{Z}$$

et

$$\int_0^{2\pi} \cos Nt \, dt = \begin{cases} 2\pi, & \text{si } N = 0; \\ 0, & \text{autrement.} \end{cases}$$

Donc,

$$\int_S (z - z_0)^m \, dz = \begin{cases} 2\pi i, & \text{si } m = -1; \\ 0, & \text{autrement.} \end{cases}$$

**Fin de l'exemple.**

## 4.6 PROPRIÉTÉS DE L'INTÉGRALE COMPLEXE.

Dans cette section on présentera certaines propriétés de l'intégrale  $\int_{\Gamma} F(z) \, dz$ . Le lecteur sera en mesure de trouver les propriétés analogues pour l'intégrale  $\int_{\Gamma} f(z) \, d\bar{z}$ .

On suppose, toujours, que  $\Gamma$  est soit un arc orienté, soit un contour fermé simple. Dans les deux cas,  $\gamma$  sera une fonction représentant  $\Gamma$ . Plus précisément,  $\gamma \in \text{Hom}([0, 1], \Gamma)$ . Si  $f$  et  $g$  sont des fonctions continues variant sur les points de  $\Gamma$ , on a

**Théorème 4.6.1** *L'intégrale complexe possède les propriétés suivantes:*

- a) Si  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $\int_{\Gamma} \lambda f(z) \, dz = \lambda \int_{\Gamma} f(z) \, dz$ .
- b)  $\int_{\Gamma} [f(z) + g(z)] \, dz = \int_{\Gamma} f(z) \, dz + \int_{\Gamma} g(z) \, dz$ .
- c)  $\int_{\Gamma^{-}} f(z) \, dz = - \int_{\Gamma} f(z) \, dz$ .
- d) Si  $\Gamma_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$  forment une décomposition de  $\Gamma$  préservant son orientation, alors

$$\int_{\Gamma} f(z) \, dz = \sum_1^n \int_{\Gamma_k} f(z) \, dz.$$

- e) Si  $L$  est la longueur de  $\Gamma$  alors  $|\int_{\Gamma} f(z) \, dz| \leq L \sup_{\Gamma} |f|$ .

f) Si, sur une région  $\Omega$ , il existe une fonction holomorphe  $g$  telle que  $g' = f$  et si  $\Gamma \in \Omega$  alors  $\int_{\Gamma} f(z) \, dz = g(\gamma(1)) - g(\gamma(0))$ . En particulier, si  $\Gamma$  est un contour fermé simple,  $\int_{\Gamma} f(z) \, dz = 0$ .

**Démonstration**

a)

$$\int_{\Gamma} \lambda f(z) \, dz = \int_0^1 \lambda (f \circ \gamma) \gamma' \, dt = \lambda \int_0^1 (f \circ \gamma) \gamma' \, dt = \lambda \int_{\Gamma} f(z) \, dz.$$

b)

$$\int_{\Gamma} [f(z) + g(z)] \, dz = \int_0^1 [f \circ \gamma + g \circ \gamma] \gamma' \, dt = \int_0^1 (f \circ \gamma) \gamma' \, dt + \int_0^1 (g \circ \gamma) \gamma' \, dt =$$

$$\int_{\Gamma} f(z) dz + \int_{\Gamma} g(z) dz.$$

c)

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma^-} f(z) dz &= \int_0^1 (f \circ \gamma_-) \gamma'_- dt = \int_0^1 f[\gamma(1-t)] [-\gamma'(1-t)] dt = \\ &= - \int_0^1 f[\gamma(u)] \gamma'(u) du = \int_{\Gamma} f(z) dz. \end{aligned}$$

d) Laissé en exercice.

e)

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| &= \left| \int_0^1 (f \circ \gamma) \gamma' dt \right| \leq \int_0^1 |f \circ \gamma| |\gamma'| dt \leq \\ &= \left[ \sup_{t \in [0,1]} |f(\gamma(t))| \right] \int_0^1 |\gamma'| dt = L \sup_{\Gamma} |f|. \end{aligned}$$

f) On voit que

$$\int_{\Gamma} f dz = \int_0^1 (f \circ \gamma) \gamma' dt = \int_0^1 (g \circ \gamma)' dt = g(\gamma(1)) - g(\gamma(0)).$$

C.Q.F.D. ■

## 4.7 DEUX THÉORÈMES AUXILIAIRES.

Les deux résultats de cette section proviennent de l'analyse réelle et les démonstrations dans toute leur généralité peuvent être trouvées dans le livre de T.M. Apostol, *Mathematical Analysis*, (Addison Wesley). Nous nous contenterons ici d'énoncer les résultats et de donner les démonstrations pour les cas bien restreints.

Le premier cas concerne la possibilité de la commutativité des opérations de dérivation et intégration.

**Théorème 4.7.1** *Soit  $R$  une région de  $\mathbb{R}^2$  définie par  $-\infty < a \leq t \leq b < +\infty$  et  $-\infty < \alpha \leq x \leq \beta < +\infty$ . Supposons que  $f(t, x)$  et  $\frac{\partial}{\partial x} f(t, x)$  soient continues en  $t$  et en  $x$ . Si  $g(t)$  est à variation bornée sur  $[a, b]$  alors  $F(x) = \int_a^b f(t, x) dg(t)$  existe. De plus,*

$$\frac{dF}{dx} = \frac{d}{dx} \int_a^b f(t, x) dg(t) = \int_a^b \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} dg(t).$$

**Démonstration partielle.**

Supposons que  $g(t) \equiv t$  et posons

$$F(t) = \int_a^b f(x, t) dx \quad , \quad G(t) = \int_a^b \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dx .$$

Les deux fonctions  $F$  et  $G$  sont continues dans  $[a, b]$ . Or, si  $\alpha$  et  $\tau$  se retrouvent dans  $[a, b]$

$$\begin{aligned} \int_\alpha^\tau G(t) dt &= \int_\alpha^\tau \int_a^b \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dx dt = \int_a^b \int_\alpha^\tau \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dt dx = \\ &= \int_a^b \{f(x, \tau) - f(x, \alpha)\} dx = F(\tau) - \int_a^b f(x, \alpha) dx . \end{aligned}$$

Mais  $\int_a^b f(x, \alpha) dx$  est une constante qui ne dépend pas de  $\tau$  ce qui implique  $F' = G$ .

**C.Q.F.D.** ■

Notons qu'en plus d'avoir simplifié par la substitution  $g(t) = t$  nous avons supposé qu'il soit légitime d'interchanger l'ordre d'intégration dans les calculs ci-hauts. La preuve générale ainsi que la justification de l'échange sont présentées dans les cours d'analyse réelle.

Le résultat suivant établit une relation fondamentale entre les intégrales curvilignes et les intégrales doubles. Il joue un rôle important dans la théorie des équations différentielles et en physique.

**Théorème 4.7.2 (Green)** Soient  $P(x, y)$ ,  $Q(x, y)$  des fonctions continues définies sur une région limitée par une courbe fermée simple orientée  $\Gamma$ . Supposons que  $\frac{\partial Q}{\partial x}$  et  $\frac{\partial P}{\partial y}$  existent et soient bornées à l'intérieur de  $\Gamma$ . De plus supposons que

$$\iint_\Omega \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy \quad \text{et} \quad \iint_\Omega \frac{\partial P}{\partial y} dx dy$$

où  $\Omega = \Gamma \cup \Gamma^\circ$  existent. Alors

$$\int_{\Gamma^+} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_\Omega \left[ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right] dx dy .$$

La preuve complète de ce théorème est compliquée à cause de la nature générale de la courbe  $\Gamma$ . Ici on se contentera de le démontrer dans le cas où  $\Gamma$  est un rectangle.

Posons

$$\Omega = \{(x, y) : x_0 < x \leq x_1, y_0 < y \leq y_1\}$$

et soit  $\Gamma$  la frontière de  $\Omega$ . Décomposons  $\Gamma$  en quatre segments  $\Gamma_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= [(x_0, y_0), (x_1, y_0)] , & \Gamma_2 &= [(x_1, y_0), (x_1, y_1)] , \\ \Gamma_3 &= [(x_1, y_1), (x_0, y_1)] , & \Gamma_4 &= [(x_0, y_1), (x_0, y_0)] . \end{aligned}$$

Or, si les hypothèses sont satisfaites pour  $\Omega$

$$\begin{aligned}
 - \iint_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= - \int_{x_0}^{x_1} \left( \int_{y_0}^{y_1} \frac{\partial P}{\partial y} dy \right) dx = - \int_{x_0}^{x_1} (P(x, y_1) - P(x, y_0)) dx = \\
 \int_{x_0}^{x_1} P(x, y_0) dx + \int_{x_1}^{x_0} P(x, y_1) dx &= \int_{\Gamma_1} P(x, y) dx + \int_{\Gamma_3} P(x, y) dx = \int_{\Gamma} P(x, y) dx.
 \end{aligned}$$

L'égalité

$$\int_{\Gamma} Q(x, y) dy = \iint_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy$$

s'établit de manière analogue.

**Exemple 4.7.1** Si  $\Gamma$  est une courbe fermée simple choisissons  $P(x, y) = -y$  et  $Q(x, y) = x$ . Alors,

$$\text{Aire}(\Gamma^\circ) = \iint_{\Gamma^\circ} dx dy = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} -y dx + x dy.$$

**Exemple 4.7.2** Évaluer  $\int_{C^+} (x - y^3) dx + x^3 dy$  où  $C = \{z : |z| = 1\}$ .

**Solution**

Si  $\Omega = C^\circ$

$$I = \int_{C^+} (x - y^3) dx + x^3 dy = \iint_{\Omega} 3(x^2 + y^2) dx dy.$$

En écrivant cette dernière intégrale en coordonnées polaires on voit que

$$I = \iint_{\Omega} 3r^3 dr d\theta = \int_{r=0}^1 \int_{\theta=0}^{2\pi} 3r^3 dr d\theta = \left( \int_0^1 r^3 dr \right) \left( \int_0^{2\pi} d\theta \right) = \frac{3\pi}{2}.$$

**Fin de l'exemple.**

Le Théorème de Green peut être parfois utile dans l'évaluation des intégrales complexes, et on verra ce fait plus en détail dans le prochain chapitre, car une telle intégrale peut s'écrire sous la forme  $I_1 + iI_2$  où  $I_1$  et  $I_2$  sont des intégrales réelles de la forme utilisée ci-haute.

**Exemple 4.7.3** Soit  $C$  un contour fermé simple et notons par  $\Omega$  la réunion de  $C$  et son intérieur. On observe que

$$\int_C \bar{z} dz = \int_C x dx + y dy + i \int_C y dx + x dy.$$

L'application du Théorème de Green à ces intégrales réelles nous permet de conclure que

$$\int_C \bar{z} dz = i \int_C -y dx + x dy = 2i \iint_{\Omega} dx dy$$

Donc, l'aire délimité par  $C$  est égale à  $\frac{1}{2i} \int_C \bar{z} dz$ . Par exemple, si  $C$  est l'ellipse décrit par les équations paramétriques

$$x(t) = a \cos 2\pi t \quad y(t) = b \sin 2\pi t, \quad 0 \leq t \leq 1$$

où  $a, b \in \mathbb{R}$  sont différents de zéro alors

$$\int_C \bar{z} dz = i \int_0^1 2\pi ab dt = 2\pi ab.$$

Donc, l'aire de l'ellipse est  $\pi ab$ .

## 4.8 EXERCICES

### SECTION 4.1

4.1 Évaluer les intégrales suivantes selon la méthode de l'Exemple 4.1.2.

$$\begin{aligned} \text{A)} \quad & \int_0^1 \Re(z) dz, \quad \Gamma = [0, 1] \\ \text{B)} \quad & \int_0^1 \Im(z) dz, \quad \Gamma = [0, 1] \\ \text{C)} \quad & \int_0^{3+4i} (z + 2\bar{z} + 1) dz, \quad \Gamma = [0, 3 + 4i]. \end{aligned}$$

4.2 Lesquelles des formes différentielles suivantes sont exactes?

$$\begin{aligned} \text{A)} \quad & xy dx - dy & \text{B)} \quad & x dx - \frac{1}{y} dy \\ \text{C)} \quad & (xy + 1) dx - dy & \text{D)} \quad & xy^2 dx + (x^2y + y^2) dy. \end{aligned}$$

4.3 Par la méthode de l'Exemple 4.1.5 trouver une anti-dérivée pour  $\log \sqrt{x^2 + y^2} + i \tan^{-1} \frac{y}{x}$  valable pour la région du plan où  $x > 0$  et  $y > 0$ .

4.4 Si  $\Delta(\vec{A})$  et  $\Delta(\vec{B})$  sont des formes différentielles réelles exactes est-t-il vrai que  $\Delta(\vec{A}) + i\Delta(\vec{B})$  représente une forme différentielle complexe exacte? (Expliquer!)

4.5 Montrer qu'aucune anti-dérivée n'existe pour la fonction  $f$  définie par  $f(z) = x^3 + iy^3$ .

### SECTION 4.2

4.6 Montrer qu'une constante  $c$  est toujours intégrable par rapport à une fonction réelle bornée  $g(t)$ . En effet

$$\int_a^b c dg(t) = c \int_a^b dg(t) = c[g(b) - g(a)].$$

4.7 Prouver que si  $f$  est intégrable par rapport à  $g_1$  et  $g_2$  alors elle l'est par rapport à  $g_1 + g_2$ .

4.8 Si  $f_1$  et  $f_2$  sont intégrables par rapport à  $g$  alors il va de même pour  $f_1 + f_2$ . De plus,

$$\int_a^b (f_1 + f_2) dg = \int_a^b f_1 dg + \int_a^b f_2 dg.$$

**4.9** Si  $c$  est une constante et si  $f$  est intégrable par rapport à  $g$  alors

$$\int_a^b cf dg = \int_a^b f d(cg) = c \int_a^b f dg.$$

### SECTION 4.3

**4.10** Si  $f \in Var([a, b])$  montrer que

$$\sup_{[a,b]} f \leq |f(a)| + V(f; a, b).$$

**4.11** Si  $f \in Var([a, b])$  avec  $\inf_{[a,b]} f > 0$  montrer que  $1/f \in Var([a, b])$  avec

$$V\left(\frac{1}{f}; a, b\right) \leq V(f; a, b) / \left[\inf_{[a,b]} f\right]^2.$$

**4.12** Trouver un exemple d'une fonction qui est continue sur  $[a, b]$  mais qui n'appartient pas à  $Var([a, b])$ .

**4.13** Si  $f \in C[a, b] \cap Var([a, b])$ , montrer que la fonction définie par  $x \mapsto V(f; a, x)$  est continue sur  $[a, b]$ .

**4.14** Si  $d \in C[a, b]$  et  $g \in Var([a, b])$  montrer que

$$\left| \int_a^b f dg \right| \leq \int_a^b |f(t)| dV(g; a, b) \leq V(g; a, b) \sup_{[a,b]} |f|.$$

**4.15** Si  $f, g \in Var([a, b]) \cap C[a, b]$ , montrer que

$$\int_a^b f dg = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g df.$$

### SECTION 4.4

**4.16** Montrer que si  $g \in Hom([0, 1], \Gamma)$  et si  $g_-(t) = g(1 - t)$  alors  $g$  représente  $(\Gamma, z_0)$  si et seulement si  $g_-$  représente  $-(\Gamma, z_0)$ .

**4.17** Soient  $\Gamma_1, \Gamma_2$  des arcs tels que  $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \{z\}$ . Montrer que  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$  est un arc si et seulement si  $z$  est une extrémité de  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ .

- 4.18** Construire une démonstration intuitive pour le Théorème 4.4.1.  
**4.19** Prouver le Théorème 4.4.2.  
**4.20** Donner une interprétation géométrique du Théorème 4.4.3.  
**4.21** Prouver le Théorème de Jordan pour (a) un cercle, (b) un rectangle.

## SECTION 4.5

- 4.22** Soit  $C$  le carré avec les sommets aux points  $(\pm 1, \pm 1)$ . Évaluer

$$\int_{C^+} \bar{z} dz + z d\bar{z}.$$

- 4.23** Pour le carré du problème 4.22, évaluer

$$\int_{C^+} (z - z_0)^m, \quad m \in \mathbb{N}.$$

- 4.24** Si  $C_r$  est le cercle  $|z| = r$ , évaluer les intégrales suivantes:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{A)} & \int_{[0, \alpha]} \Re(z) dz, & \mathbf{B)} & \int_{C_1^+} \Im(z) dz, \\ \mathbf{C)} & \int_{C_2^+} \frac{dz}{z^2+1}, & \mathbf{D)} & \int_{C_1^+} \bar{z}^n dz, \\ \mathbf{E)} & \int_{C_1^+} \bar{z}^n d\bar{z}, & \mathbf{F)} & \int_{[i, 1+i]} z \log z dz. \end{array}$$

- 4.25** Montrer que

$$\mathbf{A)} \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|z|=R} \frac{z dz}{z^3 + 1} = 0, \quad \mathbf{B)} \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{[-R, -R+i]} \frac{z^2 e^z dz}{z + 1} = 0.$$

## SECTION 4.6

- 4.26** Prouver la propriété (IV) de cette section.

## SECTION 4.7

- 4.27** Si  $\omega$  est une région de  $\mathbb{R}^2$  limitée par une courbe simple fermée  $\Gamma$  et si  $u = u(x, y)$ ,  $v = v(x, y)$  sont des fonctions de classe  $C^2$  sur  $\Omega$ , montrer que

$$\int_{\Gamma} uv dx + uv dy = \iint_{\Omega} \left\{ v \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + u \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right\} dx dy$$

et

$$\frac{1}{2} \int_{\Gamma} \left( v \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx + \left( u \frac{\partial v}{\partial y} - v \frac{\partial u}{\partial y} \right) dy = \iint_{\Omega} \left( u \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - v \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) dx dy.$$

**4.28** Évaluer

$$\int_C (x - y^3) dx + x^3 dy \quad \text{où } C = \{z : |z| = 1\}.$$

**4.29** Évaluer

$$\int_C e^x \sin y dx + e^x \cos y dy. \quad (C \text{ est le carré du problème 4.5.1.})$$

**4.30** Évaluer

$$\int_C f(x) dx + g(y) dy \quad \text{où } C = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 36\}.$$

**4.31** Peut-on utiliser le Théorème de Green pour évaluer

$$\int_C \frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2}$$

où  $C$  est le cercle unitaire?