

Chapitre 2

LA DÉRIVÉE

2.1 LIMITES.

Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction complexe de domaine $\Omega \neq \emptyset$. Si $a, L \in \mathbb{C}$ on dit que L est une limite de $f(z)$ lorsque z tend vers a si et seulement si $(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\emptyset \neq f(V(a, \delta)) \subseteq V(L, \epsilon))$.

Soit a un point isolé du domaine de $f(z)$. Donné $\epsilon > 0$, choisissons $\delta > 0$ si petit que $V(a, \delta) \cap \text{dom}(f) = \{a\}$. Alors, $f(V(a, \delta)) = \{f(a)\} \subseteq V(f(a), \epsilon)$. Donc, si a est un point isolé du domaine de la fonction f , $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = f(a)$.

Théorème 2.1.1 *Si $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$ existe, elle est unique.*

Démonstration

D'abord, notons que si a est un point isolé du domaine de f il n'y a rien à démontrer car $f(a)$ est unique d'après la définition même d'une fonction.

Supposons que f possède deux limites distinctes, disons L_1 et L_2 , lorsque $z \rightarrow a$. Choisissons $\epsilon > 0$ tel que $V(L_1, \epsilon) \cap V(L_2, \epsilon) = \emptyset$. À cette valeur de ϵ on fait correspondre deux valeurs $\delta_1 > 0$ et $\delta_2 > 0$ telles que

$$f(V^*(a, \delta_1)) \subseteq V(L_1, \epsilon) \quad \text{et} \quad f(V^*(a, \delta_2)) \subseteq V(L_2, \epsilon).$$

Si $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ alors

$$\emptyset \neq f(V^*(a, \delta)) \subseteq V(L_1, \epsilon) \cap V(L_2, \epsilon)$$

ce qui est impossible car ce dernier ensemble est vide.

C.Q.F.D. ■

Jusqu'ici on a supposé que le domaine Ω de notre fonction soit une partie de \mathbb{C} et que la limite $L \in \mathbb{C}$ mais il est à remarquer que les mêmes définitions et résultats restent valides si $\Omega \subseteq \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \mathbb{C}^\infty$ ou si $L = \infty$ en autant qu'on tient compte de la définition d'un ϵ -voisinage du point à l'infini donnée dans la section 1.8. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier le Théorème 2.1.1 si $a = \infty$ ou si $L = \infty$ ou les deux.

Il est à noter qu'avec cette notion de limite, une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est continue en $a \in \Omega$ si et seulement si $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = f(a)$.

Si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ possède une représentation de la forme $f(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$ et si $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = L = L_1 + iL_2$ alors $\lim_{z \rightarrow a} \phi(x, y) = L_1$ et $\lim_{z \rightarrow a} \psi(x, y) = L_2$ et réciproquement, si ces deux limites existent, alors $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = L_1 + iL_2$. La démonstration de ces faits devient triviale une fois qu'on note que si $z \in \Omega$

$$|\phi(z) - L_1| \leq |f(z) - L| \leq |\phi(z) - L_1| + |\psi(z) - L_2|$$

et

$$|\psi(z) - L_2| \leq |f(z) - L| \leq |\phi(z) - L_1| + |\psi(z) - L_2|.$$

Les détails de la démonstration sont laissés en exercice.

Théorème 2.1.2 *Supposons que $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = L \neq 0 + 0i$. Alors, il existe un voisinage $V^*(a, \eta)$ tel que $z \in \Omega \cap V^*(a, \eta)$ entraîne $f(z) \neq 0 + 0i$.*

Démonstration

Soit $\epsilon > 0$ donné. Alors il existe $\delta > 0$ tel que $z \in V^*(a, \delta) \cap \Omega \Rightarrow f(z) \in V(L, \epsilon)$. Posons $\epsilon = |L|/2$ et notons par η une valeur de δ correspondant à cette valeur de ϵ . Alors

$$|L| = |(L - f(z)) + f(z)| \leq |f(z) - L| + |f(z)| < \frac{1}{2}|L| + |f(z)|$$

lorsque $z \in V^*(z, \eta) \cap \Omega$. Donc $|f(z)| > \frac{1}{2}|L| > 0$ pour ces valeurs de z .

C.Q.F.D. ■

On retrouve la plupart des propriétés algébriques des limites du domaine réel dans le domaine complexe. Les démonstrations sont complètement analogues dans les deux cas, on se contentera de donner la démonstration d'une seule de ces lois fondamentales.

Soient $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = A$ et $\lim_{z \rightarrow a} g(z) = B$ où $A, B \in \mathbb{C}$. Alors

- (1) $\lim_{z \rightarrow a} [f(z) + g(z)] = A + B$,
- (2) $\lim_{z \rightarrow a} f(z)g(z) = AB$,
- (3) Si $B \neq 0 + 0i$, $\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{A}{B}$.

Démonstration de (2).

Pour $\epsilon > 0$ donné soit θ la racine positive de l'équation $x^2 + (|A| + |B|)x - \epsilon = 0$. Alors, il existe δ_1, δ_2 tels que $z \in V^*(a, \delta_1) \Rightarrow |f(z) - A| < \theta$ et $z \in V^*(a, \delta_2) \Rightarrow |g(z) - B| < \theta$. Donc, si $0 < \delta \leq \min\{\delta_1, \delta_2\}$ on voit que si $z \in V(a, \delta)$ alors

$$\begin{aligned} |f(z)g(z) - AB| &= |[f(z) - A][g(z) - B] + A[g(z) - B] + B[f(z) - A]| \\ &\leq |f(z) - A||g(z) - B| + |A||g(z) - B| + |B||f(z) - A| \\ &< \theta^2 + (|A| + |B|)\theta = \epsilon. \end{aligned}$$

C.Q.F.D. ■

Les autres lois se démontrent de façon semblable.

Exemple 2.1.1 Montrer que $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)g(z) = 0$ si $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = 0$ et s'il existe M avec $0 < M < \infty$ tel que $|g(z)| \leq M$ pour tout z dans un voisinage (non-vide) de z_0 .

Solution

Supposons que pour $\delta_1 > 0$, $z \in V^*(z_0, \delta_1) \Rightarrow |g(z)| \leq M$. Donné $\epsilon > 0$ choisissons $\delta_2 > 0$ tel que $z \in V^*(z_0, \delta_2) \Rightarrow |f(z)| < \epsilon/M$. Alors, si $0 < \delta \leq \min\{\delta_1, \delta_2\}$

$$z \in V^*(z_0, \delta) \Rightarrow |f(z)||g(z)| < \frac{\epsilon}{M}M = \epsilon.$$

Donc, $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)g(z) = 0$.

Notons que si g n'est pas bornée le résultat n'est pas toujours valide. Par exemple, si $f(z) = z$ et $g(z) = 1/z$, $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = 0$ mais la fonction g n'est bornée en aucun voisinage de 0 et, en effet $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)g(z) = 1$.

Fin de l'exemple.

Rappelons qu'un ϵ -voisinage du point ∞ se définit comme $V(\infty, \epsilon) = \{z : |z| > 1/\epsilon\}$. Avec cette définition on peut donner un sens à $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = A$ dans les cas où a, A ou les deux sont ∞ .

Exemple 2.1.2 Montrer que $\lim_{z \rightarrow \infty} (z - 1) = \infty$.

Solution

Donné $\epsilon > 0$ choisissons $\delta = \epsilon/(\epsilon + 1) < 1$. Alors, si $z \in V(\infty, \delta) = \{z : |z| > \frac{1}{\delta}\}$

$$|z - 1| \geq ||z| - 1| > \frac{1}{\delta} - 1 = \frac{\epsilon + 1}{\epsilon} - 1 = \frac{1}{\epsilon}$$

ce qui entraîne $f(z) \in V(\infty, \epsilon) = \{w : |w| > \frac{1}{\epsilon}\}$.

Fin de l'exemple.

Dans les cas où une ou l'autre des limites est ∞ les propriétés (1), (2), (3) énoncées ci-hautes ne sont pas nécessairement valides. Par exemple, $\lim_{z \rightarrow \infty} z = \infty$ et $\lim_{z \rightarrow \infty} (1/z) = 0$. Or, $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)g(z) = 1$ mais le produit $0 \cdot \infty$ n'a pas de sens!

Exemple 2.1.3 Montrer que $\lim_{z \rightarrow 0} \bar{z}/z$ n'existe pas.

Solution

Posons $z = \alpha t$ où α est un nombre complexe quelconque $\neq 0$ et t une variable réelle. Alors, si on présume l'existence de la limite

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}}{z} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\bar{\alpha}t}{\alpha t} = \frac{\bar{\alpha}}{\alpha}.$$

Mais α étant arbitraire, ceci contredit le Théorème 2.1.1 car $\bar{\alpha}/\alpha$ peut prendre une infinité de valeurs différentes.

Fin de l'exemple.

2.2 LA DÉRIVÉE D'UNE FONCTION COMPLEXE.

Il semble, au départ, qu'il serait logique de définir la dérivée d'une fonction complexe en copiant le plus conformement que possible, la définition correspondante des fonctions réelles. C'est ce que nous ferons dans cette section. Une autre approche sera examinée plus loin.

Si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ et si a est un point intérieur de Ω on dit que $f(z)$ admet une **dérivée en a** ou que $f(z)$ est **dérivable en a** si et seulement si

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \quad (2.1)$$

existe comme une valeur finie de \mathbb{C} . Dans ce cas la limite est notée $f'(a)$ et s'appelle **la dérivée de $f(z)$ en a** .

Il faut noter qu'on n'a défini la dérivée que pour les points intérieurs du domaine de la fonction. Ceci est fait pour que z puisse « approcher » a , dans l'équation 2.1, sans qu'il y ait des restrictions sur la direction d'approche. Notons que pour la présente on ne s'occupe pas de la possibilité de définir la dérivée au point $z = \infty$. Cette question sera traitée plus tard.

NOTA: À partir d'ici nous adoptons la convention que si E est un ensemble de points¹ dans \mathbb{C} , E° représente son intérieur à moins que Γ ne représente une courbe fermée qui ne se recoupe pas. Dans ce cas Γ° représente l'ensemble de points renfermés par Γ mais qui ne sont pas sur Γ . Par exemple $C(0, 1) = \{z : |z| = 1\}$ est un cercle et $C^\circ(0, 1) = \{z : |z| < 1\}$

Supposons que $f'(a)$ existe pour $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, $a \in \Omega^0$. Alors pour tout $\epsilon > 0$ il correspond $\delta > 0$ tel que

$$z \in V^*(a, \delta) \implies \left| \frac{f(z) - f(a)}{z - a} - f'(a) \right| < \epsilon$$

d'où

$$|f(z) - f(a)| < (\epsilon + |f'(a)|)|z - a|.$$

On voit, donc, que

$$\lim_{z \rightarrow a} [f(z) - f(a)] = 0.$$

Donc, **si $f(z)$ est dérivable en a elle y est continue.**

Le grand avantage de la définition de la dérivée comme une limite est, qu'étant semblable à celle des fonctions réelles, on peut affirmer, presque sans hésitation, que les formules algébriques pour la dérivée d'une somme, d'un produit et d'un quotient de deux fonctions sont vraies pour les fonctions complexes dérivables. Ceci découle du fait que les lois algébriques pour les limites des sommes, des produits et les quotients de deux fonctions sont les mêmes pour les fonctions réelles ou complexes.

¹Il doit être clair que, comme ensemble de points dans \mathbb{C} , une courbe n'a aucun point intérieur! Donc il faut tenir compte du contexte lorsque cette convention est utilisée.

Théorème 2.2.1 Si $f : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{C}$ et $g : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{C}$ sont dérivables au point $z_0 \in (\Omega_1 \cap \Omega_2)^\circ$ et si $\alpha \in \mathbb{C}$ alors

$$\begin{aligned}(\alpha f)'(z_0) &= \alpha f'(z_0), \\(f + g)'(z_0) &= f'(z_0) + g'(z_0), \\(fg)'(z_0) &= f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0).\end{aligned}$$

La démonstration de ce théorème peut se faire en faisant la traduction des démonstrations des résultats analogues des fonctions réelles à une variable qu'on peut trouver dans n'importe quel bon livre de calcul.

Supposons que $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ soit dérivable en z_0 . Dans ce cas f est dite **monogène en** z_0 . La fonction $f(z)$ est **régulière en** z_0 s'il existe $\delta > 0$ tel que f soit dérivable en chaque point d'un voisinage $V(z_0, \delta)$. Si $f(z)$ est dérivable en chaque point d'un ouvert $O \subseteq \Omega$ elle est dite **holomorphe** sur O . Donc $f(z)$ est holomorphe sur O si et seulement si elle est régulière en chaque point de O . On peut prouver qu'un ouvert possède une décomposition comme une réunion d'ouverts connexes et pour cette raison **nous supposons, en général, que le domaine de chaque fonction complexe étudiée soit une région (c-à-d un ouvert connexe)**.

NOTA: Dans certains livres on utilise le terme « analytique » comme l'équivalent de « holomorphe ». Dans un sens strict, le terme analytique implique que la fonction possède une représentation en série infinie. Plus loin on établira que ceci est effectivement vrai pour les fonctions holomorphes.

Si $f(z)$ est holomorphe sur une région Ω , sa dérivée est la fonction $f' : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $z \mapsto f'(z)$ pour tout $z \in \Omega$.

Un point z_0 est dit **singularité** de $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ si f n'est pas régulière en z_0 . Si f est dérivable en chaque point d'un certain ϵ -voisinage pointé de z_0 , sans l'être en z_0 , alors ce point s'appelle **singularité isolée** de f . Il est à noter que tout point n'appartenant pas au domaine d'une fonction est une singularité de cette fonction mais, comme on le verra dans les exemples, certains points du domaine d'une fonction peuvent être aussi des singularités.

Lemme 2.2.1 Si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est dérivable en $z_0 \in \Omega$ alors il existe $r > 0$ et une fonction $\eta : V(z_0, r) \rightarrow \mathbb{C}$ tels que η soit continue en z_0 avec $\eta(z_0) = 0$ et

$$(\forall z \in V(z_0, r)) (f(z) = f(z_0) + (z - z_0)[f'(z_0) + \eta(z)]) . \quad (2.2)$$

Démonstration

Soit $r > 0$ tel que $V(z_0, r) \subseteq \Omega$: un tel r existe car Ω est un ouvert. Posons $\Delta(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ et, pour $z \in V^*(z_0, r)$

$$\eta(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z = z_0; \\ \Delta(z) - f'(z_0) & \text{si } z \in V^*(z_0, r). \end{cases}$$

Si $\epsilon > 0$ il existe, par la définition de la dérivée, un $\delta > 0$ tel que $z \in V^*(z_0, \delta) \Rightarrow |\Delta(z) - f'(z_0)| < \epsilon$. Comme le membre de droite de cette implication n'est autre que $|\eta(z) - \eta(z_0)| < \epsilon$, ceci démontre que $\eta : V(z_0, r) \rightarrow \mathbb{C}$ est continue. L'identité (2.2) résulte immédiatement de la définition de η .

C.Q.F.D. ■

Théorème 2.2.2 Soient Ω_1, Ω_2 des régions de \mathbb{C} et supposons que $f : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{C}, g : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{C}$ avec $f(\Omega_1) \subseteq \Omega_2$ soient holomorphes sur leurs domaines respectifs. Alors $g \circ f$ est holomorphe sur Ω_1 et $(g \circ f)' = (g' \circ f)f'$.

Démonstration

Supposons que $z_0 \in \Omega_1$ et $f(z_0) \in \Omega_2$. Il existe $r > 0$ tel que $V(f(z_0), r) \subseteq \Omega_2$. Comme g est dérivable en $w_0 = f(z_0)$ il existe une fonction $\xi : V(w_0, r) \rightarrow \mathbb{C}$ telle que

$$g(w) = g(w_0) + (w - w_0) [g'(w_0) + \xi(w)]$$

où ξ est continue en w_0 et $\xi(w_0) = 0$. (Bien sûr, $w \in V(w_0, r)$.) Comme $f(z)$ est continue en z_0 , il existe $\delta > 0$ tel que

$$V(z_0, \delta) \subseteq \Omega_1 \quad \text{et} \quad f(V(z_0, \delta)) \subseteq V(w_0, r)$$

Il s'ensuit que pour un tel δ , on a

$$g(f(z)) = g(f(z_0)) + (f(z) - f(z_0)) (g'(f(z_0)) + \xi(f(z))) .$$

Comme f est dérivable en z_0 , il existe une fonction $\eta : V(z_0, \delta) \rightarrow \mathbb{C}$, continue en z_0 avec $\eta(z_0) = 0$, telle que, si $z \in V(z_0, \delta)$

$$g(f(z)) = g(f(z_0)) + (z - z_0) (g'(f(z_0))f'(z_0) + \mu(z))$$

où

$$\mu(z) = \xi(f(z))f'(z_0) + g'(f(z_0))\eta(z) + \xi(f(z))\eta(z) .$$

Il est clair que $\mu(z)$ est continue en z_0 et $\mu(z_0) = 0$. Donc

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(f(z)) - g(f(z_0))}{z - z_0} = g'(f(z_0))f'(z_0)$$

La valeur z_0 étant arbitraire. $g \circ f$ est holomorphe sur Ω_1 .

C.Q.F.D. ■

Il est possible, à ce point, d'établir une liste de dérivées pour certaines fonctions élémentaires directement de la définition.

Exemple 2.2.1 Si $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est définie par $f(z) = z^n$ où n est un entier positif, alors $f'(z) = nz^{n-1}$.

Solution

On note que si $z_0 \in \mathbb{C}$

$$z^n - z_0^n = (z - z_0)[z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + \dots + z_0^{n-1}]$$

Donc

$$\frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = z^{n-1} + z_0 z^{n-2} + \dots + z_0^{n-1}$$

Lorsque $z \rightarrow z_0$ cette dernière somme tend vers nz_0^{n-1} . Le choix de z_0 étant arbitraire, la démonstration est complète.

Fin de l'exemple.

Notons que la fonction définie par $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}$ n'a aucune singularité dans \mathbb{C} .

Exemple 2.2.2 Montrer que la fonction f définie par $f(z) = \bar{z}$ n'est dérivable en aucun point de \mathbb{C} .

Solution

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ un point quelconque et posons, pour chaque z , $h = z - z_0$. Alors $\frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} = \frac{\bar{h}}{h}$. Donc, pour que $f(z) = \bar{z}$ possède une dérivée en z_0 il faut que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{h}}{h}$ existe. Si $h = |h|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ on trouve que

$$\frac{\bar{h}}{h} = \cos 2\alpha - i \sin 2\alpha$$

Mais, lorsque $h \rightarrow 0$, α peut prendre des valeurs quelconques. Il s'ensuit que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{h}}{h}$ n'existe pas et, par conséquent, $f(z) = \bar{z}$ n'est dérivable nulle part. C'est-à-dire que tout point du domaine de la fonction est une singularité (non-isolée).

Fin de l'exemple.

Exemple 2.2.3 Définissons $f(z)$ comme suit

$$f(z) = z^2 \text{ si } z \in \mathbb{R} \quad f(z) = 0 \text{ si } z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$$

La fonction f où est-elle dérivable? Quelles sont les singularités de f ?

Solution

Soit $a = a_1 + ia_2$ un point de $\mathbb{C} - \mathbb{R}$. Alors, donné $\epsilon > 0$ choisissons $\delta > 0$ de telle manière que $0 < \delta < |a_2|$. Alors, si $z \in V(a, \delta)$, $\frac{|f(z) - f(a)|}{|z - a|} \equiv 0$. Donc, pour tout $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$, $f(z)$ est dérivable. En effet $f(z)$ est holomorphe sur $\mathbb{C} - \mathbb{R}$.

Maintenant, supposons que $a = 0$ et que $\epsilon > 0$ soient donnés. Si on choisit δ tel que $0 < \delta \leq \epsilon$ il est clair que

$$z \in V(0, \delta) \implies \left| \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} \right| = |z| < \epsilon$$

Donc, la fonction est dérivable pour $z = 0$.

Néanmoins, si $a \in \mathbb{R}$, tout voisinage de a contient toujours des valeurs de z telles que $\left| \frac{f(z)-f(a)}{z-a} \right|$ soit arbitrairement grand. Donc, $f(z)$ n'est dérivable en aucun point de $\mathbb{R} - \{0\}$ ce qui entraîne que chaque point de $\mathbb{R} - \{0\}$ est une singularité (non-isolée) de f

Fin de l'exemple.

Il n'est pas possible de traduire tous les résultats du calcul élémentaire directement au domaine complexe. Les difficultés se présentent dès qu'un résultat utilise dans son énoncé ou comme partie essentielle de sa démonstration le fait que \mathbb{R} est ordonné (la relation \leq). Considérons, par exemple, le **Théorème de Rolle** qui dit que si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et si f est dérivable sur l'intervalle ouvert (a, b) et si $f(a) = f(b)$ alors il existe $\xi \in (a, b)$ tel que $f'(\xi) = 0$. La démonstration usuelle de ce théorème montre que si le point ξ n'existe pas la fonction f serait strictement croissante (décroissante) entraînant une contradiction avec l'hypothèse $f(a) = f(b)$. Nous ne pouvons utiliser ses arguments dans \mathbb{C} car la relation $z \leq w$ n'a aucun sens lorsque z et w sont des nombres complexes quelconques.

On pourrait être tenté par une modification simple des hypothèses qui nous permettrait de trouver un remplacement pour le Théorème de Rolle. Voici une tentative qui ne marche pas.

Exemple 2.2.4 *Montrer que la proposition suivante est fautive :*

Proposition *Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur Ω et supposons que $[z_1, z_2] \subseteq \Omega$ ($[z_1, z_2]$ est le segment de droite qui relie z_1 et z_2) et, de plus, supposons que $f(z_1) = f(z_2)$. Alors il existe $\xi \in (z_1, z_2)$ tel que $f'(\xi) = 0$.*

Solution

Considérons la fonction $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(z) = z(z-1)(z-i)$ et l'intervalle $[0, 1]$. Il est clair que $f(0) = f(1)$. La dérivée de f est $f'(z) = 3z^2 - 2(1+i)z + i$. Les points sur l'axe réel sont $\{z : z = t+0i : t \in \mathbb{R}\}$ (ceux de l'intervalle $(0, 1)$ correspondent aux choix de t dans ce même intervalle). Or, $f'(t) = 0$ si et seulement si

$$3t^2 - 2t + i(-2t + 1) = 0 \quad \rightarrow \quad 3t^2 - 2t = 0; \quad 2t - 1 = 0.$$

Mais ce système d'équations n'admet aucune solution de telle sorte qu'il n'existe pas de $\xi \in (0, 1)$ avec $f'(\xi) = 0$. Ce contre exemple montre que la proposition est fautive.

Fin de l'exemple.

Il devrait être évident que le théorème de la moyenne, dont la démonstration utilise le théorème de Rolle, ne se traduit pas directement dans le domaine complexe.

Même si nous devons se passer de ces résultats il y a quand même des choses à dire par rapport aux relations entre les valeurs d'une fonction complexe et celles de sa dérivée et pour clore cette section on présente un de ces résultats dont l'application se limite aux polynômes. Pour ce faire il faut d'abord une définition puis un lemme.

Un polygone \mathcal{P} est dit **convexe** si tous les segments ouverts qui sont déterminés par deux sommets non-adjacents ont tous leurs points à l'intérieur de \mathcal{P} . La démonstration du lemme suivant est laissée en exercice.

Lemme 2.2.2 *Donné un ensemble E de n points du plan complexe il est toujours possible, pour au moins une valeur de k avec $1 \leq k \leq n$, de trouver un polygone convexe \mathcal{P} de k cotés tel que les sommets sont des points de E et les $n - k$ autres points se retrouvent à l'intérieur de E .*

Théorème 2.2.3 (Lucas) *Si \mathcal{P} est le plus petit polygone convexe qui contient tous les zéros d'un polynôme $P(z)$, alors tous les zéros de $P'(z)$ se retrouvent sur la frontière ou à l'intérieur de \mathcal{P} .*

Démonstration

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ les zéros de $P(z)$ avec, possiblement, des répétitions. Si tous les zéros sont identiques le théorème est trivialement vrai (le polygone est un point). Or, parmi les n zéros de $P(z)$ supposons que n' , ($2 < n' \leq n$ soient distincts. D'après le Lemme 2.2.2 il existe un polygone convexe \mathcal{P} de m cotés avec $2 \leq m \leq n'$ tel que les sommets $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ sont des zéros de $P(z)$ et les zéros de $P(z)$ qui ne sont pas des sommets se retrouvent à l'intérieur de \mathcal{P} .

Donné $\epsilon > 0$ soit L_{ij} , $j = 1 + i \text{ mod } m$, la droite parallèle à $\overline{\beta_i \beta_j}$ d'une distance ϵ de celui-ci et telle que le polygone \mathcal{P} se retrouve complètement dans un des deux demi-plans déterminés par L_{ij} . Nous prouverons, d'abord, que tous les zéros de $P'(z)$ sont dans le même demi-plan que le polygone \mathcal{P} . Pour ce faire on note que

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{z - \alpha_k}.$$

Si $L_{ij} = \{z : z = a + bt, t \in \mathbb{R}\}$ alors les deux demi-plans sont

$$D_1 = \left\{ z : z = \Im \left(\frac{z-a}{b} \right) < 0 \right\} \quad \text{et} \quad D_2 = \left\{ z : z = \Im \left(\frac{z-a}{b} \right) > 0 \right\}.$$

Supposons que $\mathcal{P} \subset D_\infty$ et que $z \in D_2$. Maintenant, si α_k est un des zéros de $P(z)$

$$\Im \left(\frac{z - \alpha_k}{b} \right) = \Im \left(\frac{z-a}{b} \right) - \Im \left(\frac{\alpha_k - a}{b} \right) > 0.$$

Donc $\Im(b/(z - \alpha_k)) < 0$. (Pourquoi?) Ceci est vrai pour tous les zéros de $P(z)$ de telle sorte que

$$\Im \left(\frac{bP'(z)}{P(z)} \right) = \Im \left(\sum_{k=1}^n \frac{b}{z - \alpha_k} \right) < 0$$

d'où il s'ensuit que $P'(z) \neq 0$. Vu que z était un point quelconque de D_2 , $P'(z)$ n'a aucun zéro dans D_2 .

(Notons qu'un argument similaire peut être employé dans le cas où le polygone est contenu dans D_2 .)

Or, les m droites L_{ij} déterminent un polygone \mathcal{P}_ϵ qui est parallèle à \mathcal{P} et d'une distance ϵ de celui-ci ($\mathcal{P} \subset \mathcal{P}_\epsilon$). En répétant l'argument utilisé ci-dessus on conclut que $P'(z)$ n'a aucun zéro à l'extérieur de \mathcal{P}_ϵ . Mais, vu que $\epsilon > 0$ peut être choisi arbitrairement petit, $P'(z)$ n'a aucun zéro à l'extérieur de \mathcal{P} .

C.Q.F.D. ■

Exemple 2.2.5 *Vérifier le Théorème de Lucas dans le cas où P est le polynôme défini par*

$$P(z) = 3z^4 - 4(1+i)z^3 + 6iz^2.$$

Solution

On voit facilement que

$$P(z) = z^2 [3z^2 - 4(1+i)z + 6i] = z^2 (z - r_1)(z - r_2)$$

où

$$r_1 = \frac{2 + \sqrt{5} + (2 - \sqrt{5})i}{3} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{2 - \sqrt{5} + (2 + \sqrt{5})i}{3}$$

ou, approximativement,

$$r_1 = 1.41 - 0.41i \quad \text{et} \quad r_2 = -0.08 + 1.41i.$$

Or, soit \mathcal{P} le polygone convexe déterminé par 0 , r_1 et r_2 . On note, alors, que $P'(z) = 12z^3 - 12(1+i)z^2 + 12iz = 12z(z-1)(z-i)$. La racine 0 est un sommet de \mathcal{P} et le coté du polygone \mathcal{P} déterminé par r_1 et r_2 coupe l'axe réel au point $(4/3, 0)$ et l'axe imaginaire au point $(0, 4/3)$. Donc, il est clair que les zéros 1 et i de $P'(z)$ sont à l'intérieur de \mathcal{P} .

Fin de l'exemple.

2.3 ARCS DANS LE PLAN COMPLEXE.

Avant d'aborder la deuxième façon de définir la dérivée d'une fonction complexe, il nous faut étudier brièvement certains aspects de la théorie des courbes dans \mathbb{C} .

Un **arc** Γ du plan complexe est l'image de l'intervalle $[0, 1]$ par une fonction continue injective $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$. Intuitivement, on visualise Γ comme une courbe qui ne se recoupe pas. Comme $[0, 1]$ est compact dans \mathbb{R} , il résulte que g induit un homéomorphisme entre $[0, 1]$ et Γ . (Un homéomorphisme est une bijection $g : A \rightarrow g(A)$ telle que g^{-1} soit continue sur $g(A)$.) En général, la fonction qui définit un arc comme entité géométrique n'est pas unique et ce fait est la motivation de la définition formelle suivante.

Définition 2.3.1 *Un arc Γ du plan complexe est un sous-ensemble Γ de \mathbb{C} tel que l'ensemble de tous les homéomorphismes entrent $[0, 1]$ et Γ n'est pas vide. Cet ensemble est noté par $Hom([0, 1], \Gamma)$. Si $g \in Hom([0, 1], \Gamma)$ on dit que g représente Γ .*

Exemple 2.3.1 *Si $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ le segment $[\alpha, \beta]$ est un arc. Pour voir ceci on considère $g(t) = (1-t)\alpha + t\beta$ où $t \in [0, 1]$ qui est un homéomorphisme entre $[0, 1]$ et $[\alpha, \beta]$.*

Exemple 2.3.2 *Considérons la partie Γ du cercle unitaire qui relie les points $(1, 0)$ et $(0, 1)$. Γ se décrit également bien par l'une ou l'autre des deux fonctions g_1 et g_2 définies par $g_1(t) = \cos \frac{\pi t}{2} + i \sin \frac{\pi t}{2}$ et $g_2(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2} + i \frac{2t}{1+t^2}$ où $t \in [0, 1]$. Donc, g_1 et g_2 appartiennent à $Hom([0, 1], \Gamma)$. Pouvez-vous trouver une autre membre de $Hom([0, 1], \Gamma)$?*

Lemme 2.3.1 *Si $M = \text{Hom}([0, 1], [0, 1])$ et si $\phi \in M$ alors ϕ est une fonction monotone.*

Démonstration

On traite le cas où ϕ soit « croissante », l'autre cas correspond à inverser la direction des inégalités.

Supposons que $\phi \in M$ et que $\phi(0) < \phi(1)$ et qu'il existe $t \in (0, 1)$ tel que $\phi(t) < \phi(0)$. Alors $\phi(0) \in (\phi(t), \phi(1))$. Comme ϕ est continue sur $[t, 1]$ il existe $u \in (t, 1)$ tel que $\phi(u) = \phi(0)$ ce qui est impossible puisque ϕ est une bijection. Donc $\phi(t) > \phi(0), \forall t \in (0, 1)$. De façon semblable on prouve que $\phi(t) < \phi(1)$ lorsque $t \in (0, 1)$. Si $t_0, t_1 \in (0, 1)$ avec $t_0 < t_1$ un argument similaire montrera que $\phi(t_0) < \phi(t_1)$.

C.Q.F.D. ■

Lemme 2.3.2 *Si $\xi \in \text{Hom}([0, 1], \Gamma)$ alors $\text{Hom}([0, 1], \Gamma) = \{\xi \circ \phi : \phi \in M\}$.*

Démonstration

Supposons que $\xi \in \text{Hom}([0, 1], \Gamma)$. Si $\phi \in M$ alors $\xi \circ \phi \in \text{Hom}([0, 1], \Gamma)$. Si $\chi \in \text{Hom}([0, 1], \Gamma)$, posons $\phi = \xi^{-1} \circ \chi$. Comme $\xi \in \text{Hom}([0, 1], \Gamma)$, $\xi^{-1} \in \text{Hom}(\Gamma, [0, 1])$ d'où $\phi \in M$. Donc $\chi = (\xi \circ \xi^{-1}) \circ \chi = \xi \circ \phi$.

C.Q.F.D. ■

On voit maintenant que si Γ est un arc et si $\xi \in \text{Hom}([0, 1], \Gamma)$ on peut trouver n'importe quelle autre fonction qui représente Γ en composant ξ avec des fonctions de M . Il est clair que si $a < b, (a, b \in \mathbb{R})$, on peut définir un arc Γ comme un sous-ensemble de \mathbb{C} tel que $\text{Hom}([a, b], \Gamma)$ soit non-vide. Dans ce cas l'ensemble M serait remplacé par $M(a, b) = \text{Hom}([a, b], [a, b])$. Les résultats discutés ci-hauts sont encore valables si on substitue $[a, b]$ pour $[0, 1]$ et $M[a, b]$ pour M .

Exemple 2.3.3 *Déterminer si les fonctions $g : [0, 2] \rightarrow \mathbb{C}$ et $h : [0, 3] \rightarrow \mathbb{C}$ définies comme*

$$g(t) = \begin{cases} (1+i)t, & \text{si } t \in [0, 1] \\ (1-i)t + 2i, & \text{si } t \in (1, 2] \end{cases} \quad h(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 2, & \text{si } 1 < t \leq 2 \\ 3, & \text{si } 2 < t \leq 3 \end{cases}$$

représentent des arcs dans \mathbb{C} .

Solution

La fonction g définit un homéomorphisme entre $[0, 2]$ et l'ensemble de points défini par $g([0, 2])$. En effet, l'inverse de g correspond à la projection de l'image de g sur l'axe des t . (Voir la Figure 2.1.)

La fonction h est discontinue si $t \in \{1, 2\}$ et de par ce fait elle n'est pas bijective.

Fin de l'exemple.

Supposons que Γ soit un arc représenté par $g \in \text{Hom}([a, b], \Gamma)$. Une **partition** P de $[a, b]$ est une suite finie $\{t_k\}$, qui consiste d'au moins deux éléments, telle que

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$$

pour laquelle la **norme** est

$$\delta = \|P\| = \max\{\Delta t_1, \Delta t_2, \dots, \Delta t_n\}$$

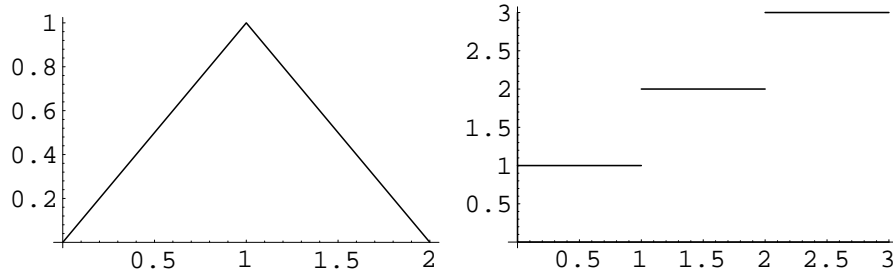


Figure 2.1: Les fonctions de l'Exemple 2.3.3.

où $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$, $k = 1, 2, \dots, n$.

NOTA: En général, une partition d'un ensemble I est un ensemble P de sous-ensembles de I deux à deux disjoints et dont la réunion est I . Donc, la définition donnée ici correspond à un type restreint de partition. On peut quand même faire le lien entre les deux définitions en notant que notre partition correspond à

$$P = \{\{t_0\}, \{t_0, t_1\}, \{t_1\}, \{t_1, t_2\}, \dots, \{t_{n-1}, t_n\}, \{t_n\}\}$$

où les t_k satisfont les inégalités mentionnées ci-haut.

Si $g(t) = x(t) + iy(t)$ alors les points P_k (c-à-d $g(t_k)$) sur l'arc Γ , correspondent aux t_k . Ces points $g(t_k)$ déterminent un polygone π_P inscrit dans Γ . (Voir la Figure 2.2.) La longueur de chaque coté de π_P est

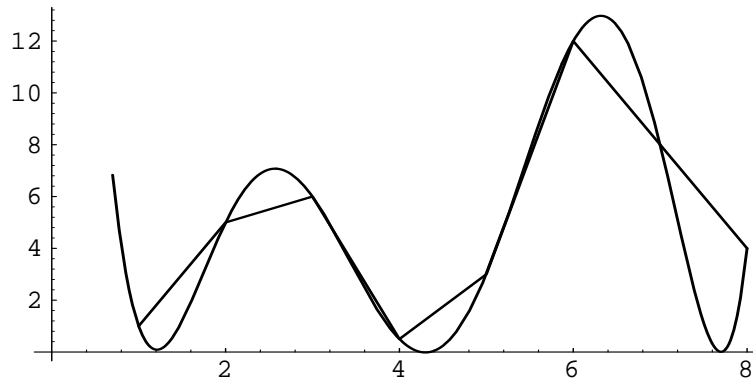


Figure 2.2: Polygone avec 8 points inscrit dans un arc.

$$|P_{k-1}P_k| = d(P_{k-1}, P_k) = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$$

où $\Delta x_k = x(t_k) - x(t_{k-1})$ et $\Delta y_k = y(t_k) - y(t_{k-1})$.

Le périmètre de π_P est

$$\lambda(P) = \sum_1^n d(P_{k-1}, P_k).$$

Considérons l'ensemble de tous les périmètres possibles correspondant à toutes les partitions possibles de $[a, b]$. S'il existe un nombre réel G , avec $0 < G < \infty$, tel que tous les périmètres $\lambda(P)$ soient plus petits qu'ou égaux à G alors on dit que l'arc Γ est **rectifiable** ou que la **longueur d'arc** de Γ existe. Cette longueur d'arc L se définit par $\sup_{P \in \text{Part}[a,b]} \lambda(P)$.

Rappelons qu'une fonction réelle $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est dite à **variation bornée** si et seulement si il existe $H > 0$ (fini) tel que pour n'importe quelle partition $P\{a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b\}$, la somme $\sum_1^m |f(t_k) - f(t_{k-1})|$ est toujours plus petite qu'ou égale à H .

On accepte le résultat suivant sans démonstration.

Théorème 2.3.1 (Jordan) *Un arc Γ représenté par $g(t) = z(t) + iy(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ possède une longueur $L < \infty$ si et seulement si les deux fonctions $x(t), y(t)$ sont à variation bornée. De plus, cette longueur L s'exprime par la formule*

$$L = \sup_{P \in \text{Part}[a,b]} \sum_1^n \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}. \quad (2.3)$$

Théorème 2.3.2 *Soit Γ un arc représenté par $g(t) = x(t) + iy(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ tel que les fonctions $x(t), y(t)$ soient de classe C^1 sur $[a, b]$. De plus, supposons que $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ et $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$ soient à la fois zéro pour au plus un nombre fini de valeurs de $t \in [a, b]$. Alors la longueur L de Γ s'exprime par la formule*

$$L = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt. \quad (2.4)$$

Démonstration

Soit $P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b\}$ une partition de $[a, b]$. Considérons la fonction $x(t)$. On voit que

$$\sum_1^n |x(t_k) - x(t_{k-1})| = \sum_1^n |\dot{x}(\tau_k) \Delta t_k|$$

où $\tau_k \in (t_{k-1}, t_k)$ par le théorème de la moyenne. De plus,

$$\sum_1^n |\dot{x}(\tau_k) \Delta t_k| < G \sum_1^n \Delta t_k = G(b - a)$$

où $0 < G < \infty$. Ceci vient du fait qu'une fonction réelle continue sur un intervalle fermé est nécessairement borné. Donc x est à variation bornée et il en est de même pour y . Par le Théorème 1, la longueur L de Γ existe et s'exprime par (2.3).

On peut supposer que $\dot{x}(t)$ et $\dot{y}(t)$ ne sont pas à la fois zéro pour tout $t \in (a, b)$. (Pourquoi?) Soient $\epsilon > 0$ et $\delta > 0$ tels que si $\lambda(P)$ est le périmètre associé à la partition P

$$L - \lambda(P) = L - \sum_1^n \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} < \frac{\epsilon}{2}$$

chaque fois que $0 < \|P\| = \text{norme de } P < \delta$. Pour un tel P on voit, en appliquant le théorème de la moyenne, que

$$\lambda(P) = \sum_1^n \sqrt{[\dot{x}(\alpha_k)]^2 + [\dot{y}(\beta_k)]^2} \Delta t_k$$

où $t_{k-1} < \alpha_k < t_k$ et $t_{k-1} < \beta_k < t_k$, $k = 1, 2, \dots, n$. Choisissons $\gamma_k \in (t_{k-1}, t_k)$ pour $k = 1, 2, \dots, n$ d'une façon complètement arbitraire. Si σ est défini par

$$\sigma = \sum_1^n \sqrt{[\dot{x}(\gamma_k)]^2 + [\dot{y}(\gamma_k)]^2} \Delta t_k$$

alors

$$|\lambda(P) - \sigma| \leq \sum_1^n \left(|\dot{x}(\alpha_k) - \dot{x}(\gamma_k)| + |\dot{y}(\beta_k) - \dot{y}(\gamma_k)| \right) \Delta t_k.$$

Comme $\dot{x}(t)$ et $\dot{y}(t)$ sont uniformément continues sur $[a, b]$, il s'ensuit que, pour $\delta_2 > 0$ suffisamment petit,

$$|\dot{x}(t) - \dot{x}(t')| < \frac{\epsilon}{4(b-a)} \quad \text{et} \quad |\dot{y}(t) - \dot{y}(t')| < \frac{\epsilon}{4(b-a)}$$

lorsque $|t - t'| < \delta_2$. Prenons un tel δ_2 et posons $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$.

Donc, quand $0 < \|P\| < \delta$ on trouve que

$$|\lambda(P) - \sigma| > \left[\frac{\epsilon}{4(b-a)} + \frac{\epsilon}{4(b-a)} \right] (b-a) = \frac{\epsilon}{2}.$$

Enfin, si $0 < \|P\| < \delta$ alors

$$|L - \lambda(P)| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{et} \quad |\lambda(P) - \sigma| < \frac{\epsilon}{2} \implies |L - \sigma| < \epsilon.$$

De ce qui précède on voit que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que, quelle que soit la partition $P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$ et les $\tau_k \in (t_{k-1}, t_k)$, $k = 1, 2, \dots, n$

$$\left| L - \sum_1^n \sqrt{[\dot{x}(\tau_k)]^2 + [\dot{y}(\tau_k)]^2} \Delta t_k \right| < \epsilon$$

ce qui, d'après la définition même de l'intégrale de Riemann, veut dire

$$L = \int_a^b \sqrt{[\dot{x}(t)]^2 + [\dot{y}(t)]^2} dt.$$

C.Q.F.D. ■

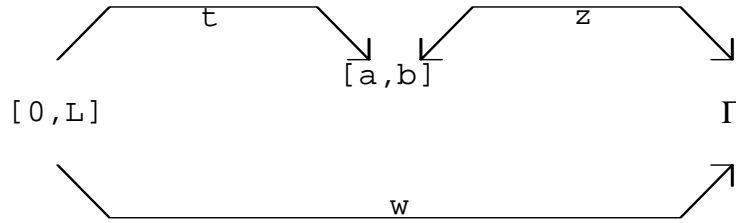


Figure 2.3:

Un arc du type décrit dans ce théorème est dit **régulier** s'il n'existe pas de $t \in (a, b)$ tel que $\dot{x}(t) = \dot{y}(t) = 0$. Lorsqu'il existe un nombre fini de valeurs $t \in (a, b)$ telles que $\dot{x}(t) = \dot{y}(t) = 0$, on dit que l'arc est **régulier par morceaux**.

Soit Γ un arc régulier représenté par $z_0(t) = x(t) + iy(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$. La fonction s définie par

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{[\dot{x}(u)]^2 + [\dot{y}(u)]^2} du$$

est strictement croissante avec $s(a) = 0$ et $s(b) = L$, la longueur d'arc de Γ . Il est clair que $s \in \text{Hom}([a, b], [0, L])$.

L'inverse de s , notée par t , est aussi strictement croissante et $t(0) = a, t(L) = b$, et $t \in \text{Hom}([0, L], [a, b])$. Il en résulte que l'arc Γ peut être représenté par la fonction $w(s) = z_1(s) = z_0(t(s)) \in \text{Hom}([0, L], \Gamma)$. (Voir la Figure 2.3.)

Exemple 2.3.4 Si $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ avec $\alpha \neq \beta$ l'arc régulier $[\alpha, \beta]$ peut être représenté par

$$z_0(t) = (1 - t)\alpha + t\beta \in \text{Hom}([0, 1], [\alpha, \beta]).$$

La fonction s est donnée par

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{\dot{z}(u)\dot{\bar{z}}(u)} du = \int_0^t |\beta - \alpha| du = |\beta - \alpha|t.$$

Donc $t(s) = s/|\beta - \alpha|$ et un point z de $[\alpha, \beta]$ peut être décrit à l'aide de la fonction

$$z_1(s) = z_0(t(s)) = \left[1 - \frac{s}{|\beta - \alpha|}\right]\alpha + \beta \frac{s}{|\beta - \alpha|}$$

qui est un membre de $\text{Hom}([0, |\beta - \alpha|], [\alpha, \beta])$.

Fin de l'exemple.

Soit Γ un arc régulier représenté par $z = z(t) = x(t) + iy(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. Au point $(x(t), y(t))$ de Γ la direction de la droite tangente est celle du vecteur (\dot{x}, \dot{y}) . Pour cette raison on appelle le nombre complexe $\dot{x} + i\dot{y}$ le **vecteur tangent** à Γ au point $(x(t), y(t))$.

Si $g(t)$ est une fonction de domaine $D \subseteq \mathbb{R}$ et qui a son image dans \mathbb{C} alors $g(t) = u(t) + iv(t)$. Si les deux fonctions réelles u, v sont dérivables on définit $\frac{dg}{dt} = \frac{du}{dt} + i\frac{dv}{dt} = \dot{u} + i\dot{v}$. Il est à noter que cette définition n'entre pas en conflit avec celle de la dérivée complexe car, considéré comme une partie de \mathbb{C} , le domaine D de $g(t)$ n'a aucun point intérieur donc, la dérivée complexe ne saurait être définie pour g .

À cause de cette définition, le vecteur tangent d'un arc régulier Γ représenté par $z = z(t)$ peut s'écrire comme dz/dt .

Pour un arc régulier Γ défini par $z_0 : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ nous avons

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{\frac{dz}{du} \frac{d\bar{z}}{du}} du$$

et on trouve que, pour la représentation $z : [0, L] \rightarrow \mathbb{C}, (s \mapsto z_0(t(s)))$ on a

$$\frac{dz}{ds} = \frac{\dot{x}(t)}{|\dot{z}(t)|} + i \frac{\dot{y}(t)}{|\dot{z}(t)|} = e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (2.5)$$

d'après la règle de dérivation d'une fonction composée de deux fonctions et celle de l'inverse d'une fonction. Notons qu'ici θ est l'angle entre $\frac{dz}{ds}$ et l'axe des x . On peut supposer que l'angle $\theta \in [0, \pi)$ car si ceci n'est pas déjà le cas le changement de paramètre $t' = -t$ corrigera la situation.

2.4 FONCTIONS POLYGÈNES.

Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction complexe définie sur une région Ω . Si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, où $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ et $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sont de classe C^1 sur Ω , f s'appelle **fonction polygène** sur Ω .

Soit f une fonction polygène sur Ω et soit Γ , représenté par $z : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ un arc régulier qui passe par un point $z \in \Omega$. Ici on suppose que $z(s) = x(s) + iy(s)$ où s est la longueur d'arc de Γ . Vu que Ω est une région, il existe un voisinage $V(z, \delta)$ tel que $V(z, \delta) \subseteq \Omega$ et une section de l'arc Γ contenant z est contenue dans $V(a, \delta)$.

Si les équations de l'arc Γ sont substituées dans celle de la fonction f on obtient une fonction $f_1 : z(\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{C}$ où (α, β) est un intervalle réel qui est formé des valeurs de s telles que $z(s) \in V(z, \delta)$. Donc, le long la section de l'arc Γ contenue dans $V(z, \delta)$ on a $f_1(s) = f(z(s)) = u(x(s), y(s)) + iv(x(s), y(s)) = u_1(s) + iv_1(s)$. (Voir la Figure 2.4.)

La dérivée de cette fonction par rapport à la variable réelle s s'exprime par

$$\begin{aligned} f_1'(s) &= \frac{df_1}{ds} = \frac{du_1}{ds} + i \frac{dv_1}{ds} \\ &= \left[\frac{dx}{ds} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{dy}{ds} \frac{\partial u}{\partial y} \right] + i \left[\frac{dx}{ds} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{dy}{ds} \frac{\partial v}{\partial y} \right] \\ &= \left[\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right] \frac{dx}{ds} + \left[\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right] \frac{dy}{ds} \end{aligned}$$

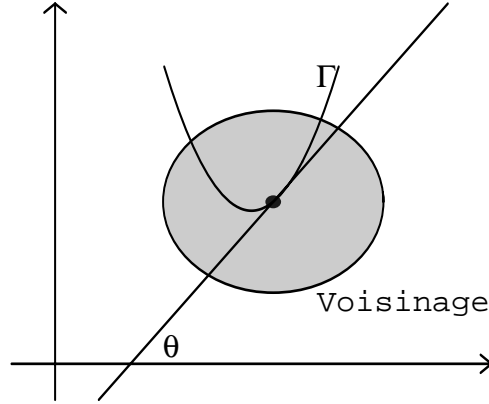


Figure 2.4:

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\partial f}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \theta \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right] e^{i\theta} + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right] e^{-i\theta}
 \end{aligned}$$

où $\frac{dz}{ds} = e^{i\theta}$ et $\frac{d\bar{z}}{ds} = e^{-i\theta}$, $\theta \in [0, \pi)$. On voit que

$$\frac{df_1}{ds} \div \frac{dz}{ds} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) f + \frac{1}{2} e^{-2i\theta} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) f$$

La quantité $f'_1(s)/z'(s)$ s'appelle **dérivée directionnelle** ou **dérivée polygène** de f , la direction étant celle de Γ au point z . Dorénavant la dérivée polygène pourra aussi se noter comme $f'(z, \Gamma)$ qui indique explicitement la dépendance sur z et Γ .

Pour simplifier la notation il convient d'introduire les deux opérateurs linéaires D_z et $D_{\bar{z}}$ définis par les formules

$$D_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad \text{et} \quad D_{\bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

La dérivée polygène s'exprime, donc, par

$$f'(z, \Gamma) = D_z f + e^{-2i\theta} D_{\bar{z}} f$$

Les formules suivantes sont facilement vérifiées:

1. $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad D_z z^n = n z^{n-1}, \quad D_{\bar{z}} z^n = 0$
2. $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad D_z \bar{z}^n = 0, \quad D_{\bar{z}} \bar{z}^n = n \bar{z}^{n-1}$
3. $(\forall m, n \in \mathbb{N}) \quad D_z z^n \bar{z}^m = n z^{n-1} \bar{z}^m, \quad D_{\bar{z}} z^n \bar{z}^m = m z^n \bar{z}^{m-1}$

Ces formules semblent indiquer que D_z agit comme une dérivée partielle par rapport à z et $D_{\bar{z}}$ comme une par rapport à \bar{z} . Mais, à vrai dire, ce n'est pas le cas car on ne peut fixer \bar{z} , par exemple, tout en laissant varier z ! Néanmoins, la tentation étant plus forte que la raison, on notera ces deux opérateurs par $D_z = \frac{\partial}{\partial z}$ et $D_{\bar{z}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ comme s'ils étaient des vraies dérivées partielles. **Il est à espérer, toutefois, que le lecteur se souviendra, qu'en réalité, ces symboles ne représentent que les opérateurs linéaires D_z et $D_{\bar{z}}$ respectivement.**

Maintenant on peut écrire la formule pour la dérivée polygène comme suit

$$f'(z, \Gamma) = \frac{\partial f}{\partial z} + e^{-2i\theta} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}.$$

À une fonction polygène $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, on associe trois plans complexes. Le premier est celui qui contient le domaine Ω de la fonction. Le deuxième est celui où on trouve les valeurs de la fonction f . Et le troisième est celui dans lequel on dessine les valeurs de la dérivée polygène $f'(z, \Gamma)$. En examinant l'expression pour la dérivée polygène, on remarque que sa valeur est déterminée par la donnée d'un point $z \in \Omega$ et par celle d'une direction (celle de la droite tangente à Γ). En particulier, si Γ_1 et Γ_2 sont deux arcs réguliers passant par z , lesquels ont la même droite tangente à ce point z , alors $f'(z, \Gamma_1) = f'(z, \Gamma_2)$, d'où il résulte que l'arc en question peut être remplacé par un intervalle d'une droite qui passe par z dans la même direction. Le couple qui consiste d'un point et une direction spécifiée par un angle θ s'appelle **élément linéaire**. Donc, la dérivée polygène établit une correspondance entre les éléments linéaires de Ω et des points du plan des dérivées.

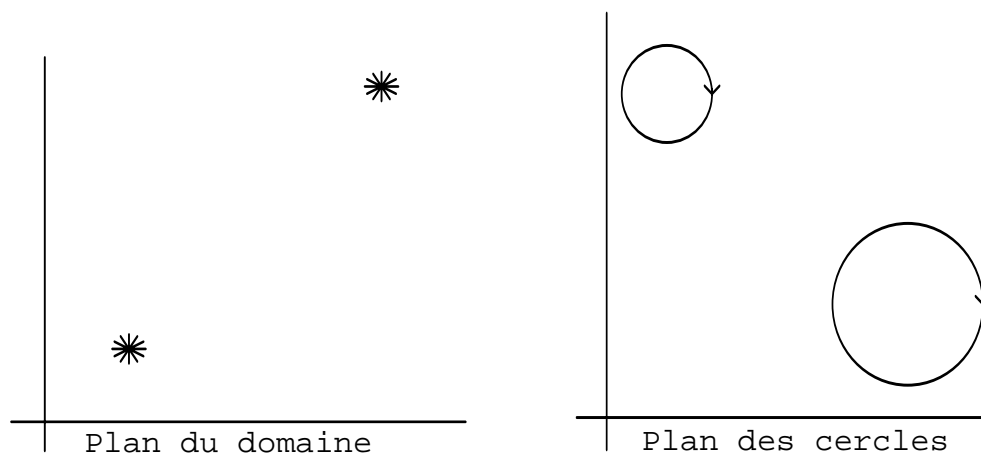


Figure 2.5:

Posons $f'(z, \theta) = \gamma = \gamma_1 + i\gamma_2 = \frac{\partial f}{\partial z} + e^{-2i\theta} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$. Alors, si z est un point fixe de Ω , les valeurs $\frac{\partial f}{\partial z}$

et $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ sont aussi des points fixes dans le plan des dérivées d'où

$$\left| \gamma - \frac{\partial f}{\partial z} \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right|$$

Si $\frac{\partial f}{\partial z} = \alpha + i\beta$ et $\left| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right| = |h + ik| = r > 0$ il résulte que, pour z fixe et lorsque θ varie, le lieu de points décrit dans le plan des dérivées est un cercle de rayon $r = \left| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right|$. Chaque élément linéaire correspondant au point z détermine un point sur ce cercle. Ce cercle, qui pourrait bien être de rayon zéro, s'appelle **cercle de Kasner** associé au point z par la fonction polygène f . Il est à noter que lorsque l'élément linéaire tourne autour du point z , le point correspondant dans le plan des dérivées se promène sur le cercle de Kasner dans la direction opposée et deux fois plus vite. (À vérifier!)

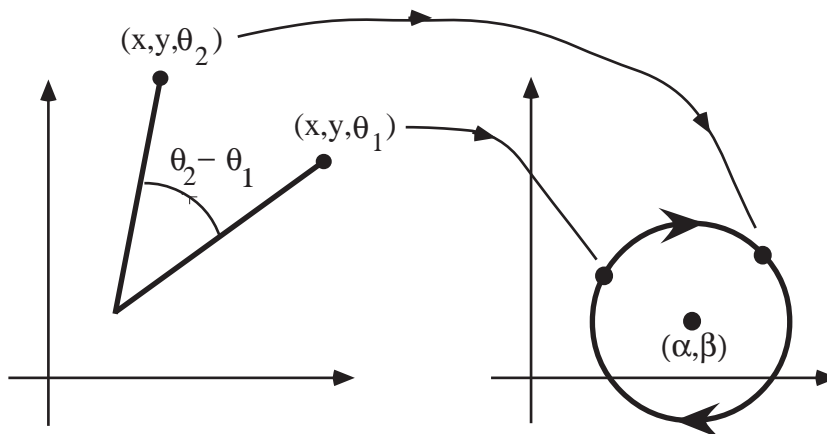


Figure 2.6:

Il est clair, maintenant, qu'on peut visualiser la correspondance $f' : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ comme une fonction qui associe à chaque point z de son domaine, un cercle. La figure 2.4 montre ce qui se passe pour deux points types et la Figure 2.6 indique comment un point varie sur le cercle de Kasner lorsqu'on varie les éléments linéaires passant par un point dans le domaine de la fonction.

Exemple 2.4.1 Évaluer la dérivée polygène de la fonction $f(z) = x^2 + y^2 + x + iy$ et déterminer s'il y a des points où f est monogène ou régulière selon les définitions de la dernière section.

Solution

On voit facilement que

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) = x + 1 - iy \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) = x + iy$$

Donc,

$$f'(z, \Gamma) = (x + 1 - iy) + e^{-2i\theta} (x + iy)$$

Notons que le rayon du cercle de Kasner est zéro si et seulement si $z = 0$.

La fonction f peut s'écrire comme $f(z) = z\bar{z} + z$ et on voit directement de la première définition de la dérivée que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\bar{z} + 1 + (z+h) \frac{\bar{h}}{h} \right) = \bar{z} + 1 + \lim_{h \rightarrow 0} (z+h) \frac{\bar{h}}{h}.$$

Mais cette limite ne peut exister que si $z = 0$! Donc, f est monogène (dérivable dans les sens ordinaire) seulement si $z = 0$. Tout voisinage $V(0, \delta)$, $\delta > 0$ contient des points pour lesquels f n'est pas monogène ce qui implique que f n'est régulière au point $z = 0$. (Elle n'est pas régulière ailleurs non plus car le prérequis d'être monogène n'est pas satisfaite.)

Fin de l'exemple.

La relation qui s'est présentée dans cet exemple entre l'existence de la dérivée et le fait que le rayon du cercle de Kasner égalant zéro n'est pas une coïncidence comme on verra dans la prochaine section.

Exemple 2.4.2 *Montrer que si f et g sont deux fonctions polygènes pour lesquelles tous les cercles de Kasner sont dégénérés (de rayon zéro) dans une région Ω alors $|f|^2 + |g|^2 \equiv k$, où k est une constante, implique que f et g sont identiquement constantes dans Ω .*

Solution

Notons que $|f|^2 + |g|^2 = f\bar{f} + g\bar{g}$. Donc,

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} (f\bar{f} + g\bar{g}) = f\bar{f}' + g\bar{g}' = 0$$

et

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} (f\bar{f} + g\bar{g}) = f'\bar{f}' + g'\bar{g}' = |f'|^2 + |g'|^2 = 0.$$

Donc, $|f'| = |g'| = 0$ d'où le résultat suit immédiatement.

Fin de l'exemple.

Dans la prochaine section on montrera que la condition imposée aux fonction f et g dans le dernier exemple équivaut à dire que les deux fonctions sont régulières dans la région Ω . Il est laissé au lecteur de reformuler l'énoncé de l'exemple en tenant compte de ce fait.

2.5 RELATIONS ENTRE LES DEUX DÉFINITIONS DE LA DÉRIVÉE.

Rappelons que si $g : U \rightarrow \mathbb{R}$, où U est un ouvert de \mathbb{R}^2 , est une fonction réelle à deux variables et si g possède une dérivée partielle par rapport à x au point $(a, b) \in U$, alors

$$\frac{\partial g}{\partial x}(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a+h, b) - g(a, b)}{h}$$

Il y a une formule semblable pour $\frac{\partial g}{\partial y}(a, b)$, si elle existe.

On rappelle aussi qu'une fonction réelle $g : U \rightarrow \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^2$, est dite **dérivable** au point $(a, b) \in U$ (ouvert) s'il existe $X, Y \in \mathbb{R}$ tels que si (x, y) se trouve dans un certain voisinage de (a, b) on ait

$$g(x, y) = g(a, b) + (x - a)[X + \eta_1(x, y)] + (y - b)[Y + \eta_2(x, y)]$$

où η_1 et η_2 sont des fonctions continues en (a, b) avec $\eta_1(a, b) = \eta_2(a, b) = 0$. Dans les cours d'analyse réelle on démontre que sous ces conditions la fonction g possède des dérivées partielles par rapport à x et y lesquelles s'expriment par

$$X = \frac{\partial g}{\partial x}(a, b) \quad \text{et} \quad Y = \frac{\partial g}{\partial y}(a, b)$$

Théorème 2.5.1 Soit $f : \omega \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction définie sur une région Ω avec $f(x, y) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$. Alors f est dérivable au point $z_0 \in \Omega$ ssi $\phi(x, y)$ et $\psi(x, y)$ sont dérivables au point (x_0, y_0) et satisfont les **équations de Cauchy-Riemann**

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} . \quad (2.6)$$

Démonstration

Supposons que $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$ et choisissons $r > 0$ tel que $V(z_0, r) \subseteq \Omega$. Si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est dérivable au point z_0 il existe une fonction $\lambda : V(z_0, r) \rightarrow \mathbb{C}$ telle que

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)[f'(z_0) + \lambda(z)], \quad z \in V(z_0, r)$$

où λ est continue en z_0 et $\lambda(z_0) = 0$. Si $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ et $z = x + iy$, on voit que

$$\phi(x, y) = \phi(x_0, y_0) + (x - x_0)[\Re(f'(z_0)) + \lambda_1(x, y)] + (y - y_0)[-\Im(f'(z_0)) - \lambda_2(x, y)].$$

Comme λ_1 et λ_2 sont continues en (x_0, y_0) avec $\lambda_1(x_0, y_0) = \lambda_2(x_0, y_0) = 0$. Il s'ensuit que $\phi(x, y)$ est dérivable en (x_0, y_0) et, de plus

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(x_0, y_0) = \Re(f'(z_0)) \quad , \quad \frac{\partial \phi}{\partial y}(x_0, y_0) = -\Im(f'(z_0)).$$

De façon semblable,

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(x_0, y_0) = \Im(f'(z_0)) \quad , \quad \frac{\partial \psi}{\partial y}(x_0, y_0) = \Re(f'(z_0)) .$$

Donc

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial \psi}{\partial y}(x_0, y_0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial \psi}{\partial x}(x_0, y_0) .$$

Réciproquement, supposons que $\phi(x, y)$ et $\psi(x, y)$ soient dérivables au point (x_0, y_0) et qu'elles satisfassent les équations (2.6). Alors, il existe quatre fonctions $\eta_j(x, y)$, $j = 1, 2, 3, 4$ définies dans un certain voisinage de (x_0, y_0) telles que

$$\phi(x, y) = \phi(x_0, y_0) + (x - x_0) \left[\frac{\partial \phi}{\partial x}(x_0, y_0) + \eta_1(x, y) \right] + (y - y_0) \left[\frac{\partial \phi}{\partial y}(x_0, y_0) + \eta_2(x, y) \right]$$

et

$$\psi(x, y) = \psi(x_0, y_0) + (x - x_0) \left[\frac{\partial \psi}{\partial x}(x_0, y_0) + \eta_3(x, y) \right] + (y - y_0) \left[\frac{\partial \psi}{\partial y}(x_0, y_0) + \eta_4(x, y) \right]$$

où les η_j sont continues en (x_0, y_0) avec $\eta_j(x_0, y_0) = 0$.

Des équations (2.6), on obtient

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0) \left[\frac{\partial \phi}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial \psi}{\partial x}(x_0, y_0) + \xi(z) \right]$$

tel que, pour $z \neq z_0$

$$\xi(z) = (\eta_1 + i\eta_3) \frac{x - x_0}{z - z_0} + (\eta_2 + i\eta_4) \frac{y - y_0}{z - z_0} .$$

Il est clair que, pour $z \neq z_0$

$$|\xi(z)| \leq |\eta_1(x, y)| + |\eta_2(x, y)| + |\eta_3(x, y)| + |\eta_4(x, y)|$$

de telle sorte que $|\xi(z)| \rightarrow 0$ lorsque $z \rightarrow z_0$. En appliquant le Lemme 2.2.1, on a que $f(z)$ est dérivable en z_0 .

C.Q.F.D. ■

Dans la démonstration de ce théorème nous avons supposé que les fonctions ϕ et ψ fussent dérivables au point (x_0, y_0) . Cependant, pour le reste de cette section, on suppose que ces deux fonctions soient de classe C^1 sur leur région de définition ou, ce qui revient au même, que $f = \phi + i\psi$ soit une fonction polygène sur Ω .

Théorème 2.5.2 *Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction polygène sur une région Ω et soit $z \in \Omega$. Alors, la dérivée, définie comme une limite, de f existe si et seulement si le graphique de sa dérivée polygène à ce point z est un cercle de rayon zéro (c-à-d un point).*

Démonstration

Du Théorème 2.5.1 on voit que f est dérivable en z si et seulement si les équations de Cauchy-Riemann sont satisfaites. Mais ceci est vrai si et seulement si $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$. Comme le rayon du cercle de Kasner est $|\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}|$, le résultat est établi.

C.Q.F.D. ■

Exemple 2.5.1 *Supposons que f soit une fonction polygène et que $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ dans une région Ω . Que peut-on dire par rapport à la nature de la fonction f ?*

Solution

La condition $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ sur Ω implique que

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

d'où

$$\frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \implies \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Donc, u et v sont des fonctions de la variable réelle x (elles sont indépendantes de y). À moins d'être identiquement constante, une telle fonction f ne peut jamais être régulière dans une région car les équations de Cauchy-Riemann exigeraient que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

sur Ω .

Fin de l'exemple.

Il est facile à voir que les équations de Cauchy-Riemann sont équivalentes à la condition $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$. Donc, si nous avons à étudier une fonction afin de savoir si elle est dérivable, régulière ou holomorphe nous pouvons nous servir des équations de Cauchy-Riemann directement, ce qui requiert la décomposition de la fonction complexe sous la forme $u(x, y) + iv(x, y)$, ou nous pouvons appliquer l'opérateur $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$, si la fonction se présente comme une expression en z et \bar{z} .

Exemple 2.5.2 *Étudier les fonctions*

$$\text{a) } f(z) = 3z^2\bar{z} + \bar{z}^3 - 6\bar{z} \qquad \text{b) } g(z) = xy^2 + x + 2 + xy^3i$$

pour déterminer où elles sont dérivables.

Solution

a) Ici on trouve que $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 3z^2 + 3\bar{z}^2 - 6$. Donc, f est dérivable pour les points qui satisfont l'équation $z^2 + \bar{z}^2 - 2 = 0$. En variables réelles on voit immédiatement que ceci représente l'hyperbole $x^2 - y^2 = 1$. La fonction f est alors dérivable (monogène) pour tout point sur cette courbe mais elle ne saurait être régulière en aucun point. (Pourquoi?)

b) Dans ce cas nous avons $u = xy^2 + x + 2$ et $v = xy^3$ de telle sorte que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 + 1 \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2xy \quad \frac{\partial v}{\partial x} = y^3 \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 3xy^2$$

et les équations de Cauchy-Riemann exigent que

$$y^2 - 3xy^2 + 1 = 0 \quad \text{et} \quad y(y^2 + 2x) = 0$$

Il est clair que $y \neq 0$ à cause de la première équation. L'autre possibilité est $y^2 = 2x$ ce qui entraîne $6x^2 - 2x - 1 = 0$. Il faut exclure la racine positive de cette équation à cause de la condition $y^2 + 2x = 0$ (y doit être réel). Donc g n'est dérivable qu'aux points

$$z_1 = \frac{1 - \sqrt{7}}{6} + i\sqrt{\frac{1 - \sqrt{7}}{3}} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{1 - \sqrt{7}}{6} - i\sqrt{\frac{1 - \sqrt{7}}{3}}$$

On note que g n'est régulière en aucun point.

Fin de l'exemple.

S'il est déjà connu qu'une fonction f est holomorphe sur une région Ω il est possible de calculer sa fonction dérivée de plusieurs façons différentes en utilisant les égalités impliquées par les équations de Cauchy-Riemann. En effet, pour tous les $z \in \Omega$, $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = -i\frac{\partial f}{\partial y}$ de telle sorte que

$$f'(z) = \frac{df}{dz} = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x} = -i\frac{\partial f}{\partial y}.$$

En pratique on choisit la formule qui s'applique directement à la forme de la fonction donnée.

2.6 EXERCICES

SECTION 2.1

2.1 Prouver que

$$\text{A)} \quad \lim_{z \rightarrow z_0} z^n = z_0^n, \quad \text{B)} \quad \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{z^n} = \frac{1}{z_0^n}$$

2.2 Évaluer

$$\begin{aligned} \text{A)} \quad & \lim_{z \rightarrow i} \frac{iz^3 - 1}{z - i}, \\ \text{B)} \quad & \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{P(z)}{Q(z)} \text{ où } P, Q \text{ sont des polynômes,} \\ \text{C)} \quad & \lim_{z \rightarrow i} \frac{z + 3}{z^2 - i}. \end{aligned}$$

2.3 À partir de la définition montrer que

$$\text{A)} \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z^2 + 1} = 0, \quad \text{B)} \quad \lim_{z \rightarrow 3} \frac{1}{(z - 3)^3} = \infty$$

2.4 Lesquelles des limites suivantes existent?

$$\text{A)} \quad \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\Re(z^2)}{|z|^2}, \quad \text{B)} \quad \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\Im(z^2)}{|z|^2},$$

$$\text{C)} \quad \lim_{z \rightarrow 0} f(z) \quad \text{où} \quad f(z) = \begin{cases} |z|^2, & \text{si } x, y \text{ rationnels;} \\ 0, & \text{autrement.} \end{cases}$$

2.5 Prouver les formules pour les limites des sommes et quotients.

SECTION 2.2

2.6 Prouver les formules pour la dérivée d'une somme, d'un produit et d'un quotient.

2.7 Montrer que $f(z) = \Re(z)$ n'est jamais dérivable.

2.8 Pour quelles valeurs de $z = x + iy$ la fonction f définie par $f(x, y) = f(z) = x^2 + axy + by^2$, $a, b \in \mathbb{R}$ est-elle dérivable?

2.9 Montrer, à partir de la définition de la dérivée, que

$$\frac{d}{dz} \frac{1}{z} = -\frac{1}{z^2} \quad \text{si } z \neq 0.$$

2.10 Trouver les singularités de $f(z) = 1/(z^4 + 1)$.

2.11 Prouver le Lemme 2.2.2

2.12 Montrer que $f(z) = z\bar{z} = |z|^2$ est dérivable en $z = 0$ mais ne l'est pas pour toute autre valeur de z . Que se passe-t-il pour la fonction $g(z) = |z|$?

SECTION 2.3

2.13 Si

$$g(t) = \begin{cases} i, & \text{si } t = 0; \\ t \sin \frac{1}{t} + ie^t, & \text{si } t \in (0, 1]. \end{cases}$$

montrer que g définit un arc qui n'est pas rectifiable.

2.14 Si Γ est un arc, montrer que $Hom(\Gamma, \Gamma)$ est un groupe et que

$$Hom(\Gamma, \Gamma) \cong Hom([0, 1], [0, 1]).$$

2.15 Pour l'arc Γ représenté par $z(t) = \log |\sec t| + it : [0, \pi/4] \rightarrow \mathbb{C}$, remplacer le paramètre t par la longueur d'arc s .

2.16 ★ Si Γ est un arc représenté par $z(t) = x(t) + iy(t)$ et si dans un voisinage de t_0 , $\dot{x}(t)$ et $\dot{y}(t)$ ne sont pas à la fois zéro, montrer que le rapport

$$\frac{\text{longueur d'arc}}{\text{longueur de corde}}$$

tend vers 1 lorsque $P(x(t), y(t))$ tend vers $P_0((x(t_0), y(t_0)))$ le long de l'arc Γ .

2.17 Trouver au moins deux représentations paramétriques pour l'ellipse

$$x^2 + \frac{y^2}{4} = 1.$$

SECTION 2.4

2.18 Évaluer la dérivée polygène pour chacune des fonctions suivantes:

- A)** $f(z) = \Re(z)$, **B)** $f(z) = \Im(z)$,
C) $f(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$, **D)** $f(z) = \bar{z}$,
E) $f(z) = \cosh(\Re(z))$, **F)** $f(z) = (1+z)/(1+\bar{z})$.

2.19 Une fonction $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est dite **monogène en \bar{z}** au point z_0 de son domaine si $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$. Trouver une interprétation géométrique de cette situation.

2.20 Trouver le cercle de Kasper associé à chaque point du domaine de la fonction $f(z) = 2\Re(z)$.

2.21 Trouver tous les points auxquels $f(z) = z\bar{z}^2 - 2\bar{z} - 3i$ est monogène.

2.22 Existe-t-il des fonctions $\phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que le rayon de leurs cercles de Kasper soit toujours zéro dans une région?

2.23 Prouver que si $f = \phi + i\psi$ est une fonction holomorphe dans une région Ω alors $\phi \equiv$ constante sur Ω si et seulement si $f \equiv$ constante sur Ω .

2.24 Si $f(z) = \phi(z) + i\psi(z)$, montrer que

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} = \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)}.$$

2.25 ★ Si f est une fonction polygène en w et g une fonction polygène en z telles que la composition $g \circ f$ soit polygène en z , prouver que

$$\frac{\partial}{\partial z} f[g(z)] = \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \bar{w}} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z}.$$

2.26 Une fonction f de classe C^2 sur une région Ω est dite **harmonique** si $\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ sur Ω . Montrer que

A) $\nabla^2 f = 4 \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} = 0$ si f est harmonique.

B) Si f est harmonique alors $f(z) = H(z) + G(\bar{z})$.

2.27 Est-il vrai que si f et g sont des fonctions polygènes sur une région Ω alors $(fg)' = fg' + gf'$? (Expliquer!)

2.28 Si $\phi(x, y)$ est une fonction harmonique réelle montrer que si P est un polynôme en une variable alors $P(\phi(x, y))$ ne peut être harmonique que si P est linéaire.

SECTION 2.5

2.29 Montrer que $f(z) = x^2 + 3y^2 + 2ixy$ ne possède une dérivée unique que pour les points de l'axe réel.

2.30 Si r, θ sont des coordonnées polaires, prouver que

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2z} \left(r \frac{\partial}{\partial r} - i \frac{\partial}{\partial \theta} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2\bar{z}} \left(r \frac{\partial}{\partial r} + i \frac{\partial}{\partial \theta} \right).$$

Déduire la forme des équations de Cauchy-Riemann en coordonnées polaires.

2.31 Si $f(z) = \sqrt{r} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right)$ où $r > 0$ et $-\pi < \theta < \pi$, prouver que $f'(z)$ existe.

PROBLÈMES DIVERS

2.32 Démontrer que si f et g sont des fonctions régulières au point z_0 et si $g'(z_0) \neq 0$ alors

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

(Ceci est une forme de la règle de l'Hôpital.) Notons que si $g'(z_0) \neq 0$ on peut appliquer la règle sur f'/g' si ces deux dernières fonctions sont régulières au point z_0 .

2.33 Évaluer

$$\mathbf{A)} \quad \lim_{z \rightarrow i} \frac{z^{16} + 1}{z^6 + 1}, \quad \mathbf{B)} \quad \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{z^3 + 8i}{2z^2 + (3-4i)z - 6i}.$$

2.34 ★ Trouver une solution particulière de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (x^2 + y^2)^n$$

pour les cas $n = 1$ et $n = 2$.